n. 1

Prova orale ☐ Secondo appello ☐ Terzo appello

Domanda 1) (10 punti) Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 palline rosse. La seconda urna contiene 5 palline gialle e 5 palline verdi. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento) dalla prima urna.
Se le due palline sono dello stesso colore, si estraggono due palline dalla seconda urna, altrimenti si estraggono quattro palline dalla seconda urna.
Calcolare la probabilità che dalla seconda urna venga estratta una ed una sola pallina gialla.
Sapendo che dalla seconda urna è stata estratta una ed una sola pallina gialla, calcolare la probabilità che dalla prima urna siano state estratte due palline bianche.

$\mathbb{P}_1 = \frac{73}{189}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{14}{73}$.

Svolgimento

Domanda 2) (8 punti) La v.a. X, definita sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$Y(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se } X(\omega) \leq \mu - \sigma, \\ 0 & \text{se } \mu - \sigma < X(\omega) < \mu + \sigma, \\ 1 & \text{se } X(\omega) \geq \mu + \sigma. \end{cases}$$

Calcolare densità, media e varianza di Y in funzione della legge gaussiana standard Φ.

$\begin{array}{c} p_Y(1) = p_Y(-1) = 1 - \Phi(1) \\ p_Y(0) = 2\Phi(1) - 1 \end{array}$, $\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{Var[Y]} = 2\,(1 - \Phi(1))$.

Svolgimento

Domanda 3) (12 punti) X e Y sono v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione di Bernoulli di parametro p, mentre Y è tale che

$$\mathbb{P}(Y \leq t | X = 1) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & t \in [0,1), \\ 1 & t \geq 1, \end{cases} \qquad \mathbb{P}(Y \leq t | X = 0) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ t+1 & t \in [-1,0), \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare legge, media e varianza di Y.

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ (1-p)(t+1) & -1 \leq t < 0 \\ pt + 1 - p & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}, \qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{2p-1}{2}, \qquad \mathrm{Var}[Y] = \frac{1 + 12p(1-p)}{12}.$$

Svolgimento