1 Criterio di condensazione

Proposizione 1.1. *Sia* $\{a_k\}_k$ *uns successione positiva monotona decrescente:*

$$0 < a_k \leq a_{k+1}.$$

Allora $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *e* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ *hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. Indico con s_n e con σ_n rispettivamente le successioni delle somme parziali associate ad a_k e a $2^k a_{2^k}$ e considero s_{2^n}:

$$\begin{aligned} s_{2^n} = & \underbrace{a_0}_{\geq 0} + \underbrace{a_1}_{\geq \frac{1}{2}a_1} + \underbrace{a_2}_{\geq 1a_2} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + \ldots + a_8}_{\geq 4a_8} + \\ & + \underbrace{a_9 + \ldots + a_{16}}_{\geq 8a_{16}} + \ldots + \underbrace{a_{1+2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n}}_{\geq 2^{n-1}a_{2n}} \\ & \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}\sigma_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, se considero s_{2^n-1} ottengo

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} = & a_0 + \underbrace{a_1}_{\leq 1a_1} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + \underbrace{a_4 + \ldots + a_7}_{\leq 4a_4} + \\ & + \underbrace{a_8 + \ldots + a_{15}}_{\leq 8a_8} + \ldots + \underbrace{a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}}_{\leq 2^{n-1}a_{2n}} \\ \leq & a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \sigma_{n-1} \leq a_0 + \sigma_n. \end{aligned}$$

Supponiamo dunque che s_n converga a s. Poiché $a_k > 0$ per ogni k abbiamo

$$\frac{1}{2}\sigma_n \leq s_{2^n} \leq s.$$

Dunque la successione delle somme parziali σ_n è monotona crescente e limitata superiormente e quindi converge.

Supponiamo che s_n diverga a $+\infty$. Allora anche $s_{2^n-1} - a_0$ diverge a $+\infty$. Poiché $\sigma_n \geq s_{2^n-1} - a_0$, abbiamo che σ_n diverge a $+\infty$. □

Esempio 1.1. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti.

Osservazione 1.1. *La serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *è detta* serie armonica*.*

Dimostrazione. Il termine generico $a_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$ è positivo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, dunque la serie in esame può solo convergere o divergere a $+\infty$.

La condizione necessaria per la convergenza $\lim_k a_k = 0$ è soddisfatta solo se $\alpha > 0$, dunque per ogni $\alpha \leq 0$ la serie sicuramente diverge.

Se $\alpha > 0$, allora $a_{k+1} < a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi posso applicare il criterio di condensazione: la serie ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Poiché

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha} = \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ non è altro che la serie geoemtrica di ragione $2^{1-\alpha}$ e dunque converge se e solo se $2^{1-\alpha} \in (-1, 1)$ cioè se e solo se $1 - \alpha < 0$ ovvero se e solo se $\alpha > 1$. $\square$