

**Analisi Matematica I** – CdL Fisica e Astrofisica  
Quinto appello - 14 Luglio 2014

**Esercizio 1.** Si consideri l'equazione

$$x \log x = 1.$$

- (i) Dimostrare che esiste almeno un numero  $x \in [1, 2]$  che risolve l'equazione.
- (ii) Dimostrare che esiste un unico  $x > 0$  che risolve l'equazione.

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\int_{-1}^1 |x| \sin x \, dx.$$

**Esercizio 3.** Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 3|a_n - 1|. \end{cases}$$

Dimostrare che

- 1.  $a_n \geq 3$  per ogni  $n \geq 2$  (suggerimento: dimostrare per induzione);
- 2.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2$  per ogni  $n \geq 2$  (suggerimento: sfruttare il punto precedente);
- 3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (suggerimento: sfruttare il punto precedente).

**Esercizio 4.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n)) \log(2^n + 3^n)}{n! \log(1 + 2^{-n})}$$