

4 Variabili aleatorie

Esercizio 4.1. Sia X una v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X segua la distribuzione geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Sia $Y := X^2 - 4X$. Calcolare

1. $Y(\Omega)$;
2. la densità discreta della v.a. Y ;
3. la media della v.a. Y

$$\left[\left\{ k^2 - 4k \right\}_{k=1}^{+\infty}, \begin{cases} p_{-4} = p(1-p), \\ p_{-3} = p(2-2p+p^2), \\ p_{k^2-4k} = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \geq 4 \end{cases}, \frac{2}{p^2} - \frac{5}{p} - 6 + 12p - 9p^2 + 3p^3 \right]$$

Esercizio 4.2. Sia X una v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X segua la distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$. Sia $Y := \max\{X^2 + 3, 4X\}$. Calcolare

1. $Y(\Omega)$;
2. la densità discreta della v.a. Y ;
3. la media della v.a. Y

$$\left[\{3, 4, 8, 12, 17\}, p_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4, p_4 = \frac{3}{4^3}, p_8 = \frac{2 \cdot 3^3}{4^4}, p_{12} = \left(\frac{3}{4}\right)^3, p_{17} = \left(\frac{1}{4}\right)^4, \frac{509}{64} \right]$$

Esercizio 4.3. La v.a. X è assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := 2X - X^2$. Calcolare legge, densità e media di Y

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3 \\ \frac{\sqrt{1-t} - \frac{1-t}{2}}{3-t-2\sqrt{1-t}} & -3 \leq t < 0 \\ \frac{3-t-2\sqrt{1-t}}{2} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}, f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3 \text{ o } t > 1 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) & -3 \leq t < 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} - 1\right) & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}, \frac{-1}{2} \right]$$

Esercizio 4.4. La v.a. X è assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := \max\{X, 1 - X\}$. Calcolare legge, densità e media di Y

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ \frac{2t-1}{2} & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{2-2t+t^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2. \end{cases}, f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \text{ o } t > 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ t-1 & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}, \frac{29}{24} \right]$$

Esercizio 4.5. La v.a. X è a.c. con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0, 1] \cup [3, 4], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := \max\{X, 2\}$. Calcolare legge e media di Y .

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{t-2}{2} & 3 \leq t < 4 \\ 1 & t \geq 4. \end{cases}, \quad \frac{11}{4}$$

Esercizio 4.6. La v.a. X ha legge

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ \frac{1}{6} & -1 \leq t < 0, \\ \frac{2+t}{6} & 0 \leq t < 3, \\ 1 & t \geq 3. \end{cases}$$

Calcolare legge e media di $Y = X^2$.

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1+\sqrt{t}}{6} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{2+\sqrt{t}}{6} & 1 \leq t < 9 \\ 1 & t \geq 9. \end{cases}, \quad \frac{19}{6}$$