3 Variabili aleatorie

Esercizio 3.1. Sia X una v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X segua la distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Sia $Y := X^2 - 4X$. Calcolare

1. $Y(\Omega)$;
2. la densità discreta della v.a. Y;
3. la media della v.a. Y

$$\left[\left\{k^2 - 4k\right\}_{k=1}^{+\infty}, \begin{cases} p_{-4} = p(1-p), \\ p_{-3} = p(2-2p+p^2), \\ p_{k^2-4k} = p(1-p)^{k-1} & \forall k \geq 4 \end{cases}, \right.$$

$$\left. \frac{2}{p^2} - \frac{5}{p} - 6 + 12p - 9p^2 + 3p^3 \right]$$

Esercizio 3.2. Sia X una v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X segua la distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$. Sia $Y := \max\{X^2 + 3, 4X\}$. Calcolare

1. $Y(\Omega)$;
2. la densità discreta della v.a. Y;
3. la media della v.a. Y

$$\left[\{3,\ 4,\ 8,\ 12,\ 17\},\ p_3 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^4,\ p_4 = \tfrac{3}{4^3}, \right.$$

$$\left. p_8 = \tfrac{2\cdot 3^3}{4^4},\ p_{12} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3,\ p_{17} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^4,\ \tfrac{509}{64} \right]$$

Esercizio 3.3. La v.a. X è assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := 2X - X^2$. Calcolare legge, densità e media di Y

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<-3 \\ \sqrt{1-t} - \frac{1-t}{2} & -3 \leq t < 0 \\ \frac{3-t-2\sqrt{1-t}}{2} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1. \end{cases},\ f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<-3 \ \text{ o } \ t>1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) & -3 \leq t < 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} - 1\right) & 0 \leq t \leq 1. \end{cases},\ \frac{-1}{2} \right]$$

Esercizio 3.4. La v.a. X è assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := \max\{X, 1-X\}$. Calcolare legge, densità e media di Y

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<\frac{1}{2} \\ \frac{2t-1}{2} & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{2-2t+t^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2. \end{cases},\ f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<\frac{1}{2} \ \text{ o } \ t>2 \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ t-1 & 1 \leq t \leq 2. \end{cases},\ \frac{29}{24} \right]$$

Esercizio 3.5. La v.a. X è a.c. con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0,1] \cup [3,4], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := \max\{X, 2\}$. Calcolare legge e media di Y.

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ \frac{1}{2} & 2\le t<3 \\ \frac{t-2}{2} & 3\le t<4 \\ 1 & t\ge 4. \end{cases}, \quad \frac{11}{4} \right]$$

Esercizio 3.6. La v.a. X ha legge

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ \frac{1}{6} & -1 \le t < 0, \\ \frac{2+t}{6} & 0 \le t < 3, \\ 1 & t \ge 3. \end{cases}$$

Calcolare legge e media di $Y = X^2$.

$$\left[F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1+\sqrt{t}}{6} & 0\le t<1 \\ \frac{2+\sqrt{t}}{6} & 1\le t<9 \\ 1 & t\ge 9. \end{cases}, \quad \frac{19}{6} \right]$$

Esercizio 3.7. La v.a. X è assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \le |x| \le 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y := \max\{2, X^2\}$. Scrivere la legge di Y e calcolarne la media.

Esercizio 3.8. La v.a. Y segue la distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Sia $Y := \max\{X^2, 5X - 4\}$. Indicare l'immagine di Y e la sua densità.