
Prova orale

Secondo appello

Terzo appello

Domanda 1) (max 6 punti) Si lancia un dado. Se esce 6 si lanciano sei monete, altrimenti si lanciano tre monete.

Calcolare la probabilità di ottenere tre teste.

Sapendo che si sono ottenute tre teste, calcolare la probabilità di aver ottenuto 6 nel lancio del dado.

$$\mathbb{P}_{t3} = \frac{5}{32},$$

$$\mathbb{P}_{d6} = \frac{1}{3}.$$

Svolgimento

Domanda 2) (max 12 punti) X e Y sono v.a. sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X è uniformemente distribuita sull'insieme $\{-1, 0, 1\}$ mentre Y è distribuita sugli interi non-negativi e, per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}(Y = k | X = -1) = p(1-p)^k,$$

$$\mathbb{P}(Y = k | X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1},$$

$$\mathbb{P}(Y = k | X = 1) = (1-p)p^k.$$

Calcolare

- l'immagine della v.a. $Z := XY$,
- la densità di Z ,
- la media di Z .

$$Z(\Omega) = \mathbb{Z}, \quad f_Z(k) = \begin{cases} \frac{(1-p)p^k}{3} & k > 0 \\ \frac{2}{3} & k = 0 \\ \frac{p(1-p)^{-k}}{3} & k < 0 \end{cases}, \quad \mathbb{E}[Z] = \frac{2p-1}{3p(1-p)}$$

Svolgimento

Domanda 3) (max 14 punti) Le v.a. X_1 , X_2 e X_3 sono indipendenti e seguono la distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Calcolare le densità delle v.a.

$$S_2 := X_1 + X_2, \quad \bar{X}_2 := \frac{S_2}{2}, \quad S_3 := X_1 + X_2 + X_3, \quad \bar{X}_3 := \frac{S_3}{3}.$$

Suggerimento: Scrivere S_3 come $S_3 = S_2 + X_3$.

$$f_{S_2}(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$f_{\bar{X}_2}(t) = \begin{cases} 4t & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 4(1 - t) & \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$f_{S_3}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & 0 < t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2} & 1 < t < 2 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + 4 & 2 < t < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$f_{\bar{X}_3}(t) = \begin{cases} \frac{27t^2}{2} & 0 < t < \frac{1}{3} \\ 3 \left(-9t^2 + 9t - \frac{3}{2} \right) & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 3 \left(\frac{9t^2}{2} - 9t + 4 \right) & \frac{2}{3} < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Svolgimento