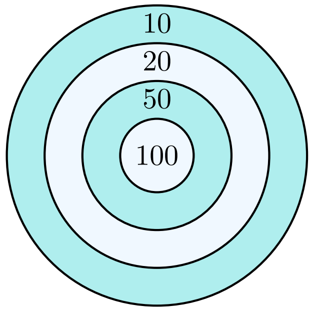
1 Esercizi – Foglio 4

Esercizio 1.1. Si consideri il seguente bersaglio:



Tiro una freccia contro il bersaglio e ottengo un certo punteggio a seconda della zona colpita, come indicato in figura. Supponendo di non mancare il bersaglio, qual è il punteggio medio atteso? La varianza dei punteggi?

Esercizio 1.2. Una variabile aleatoria continua X ha densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c\,|x| \exp^{-ax^2} \in \mathbb{R}$$

dove a è un parametro reale positivo. Determinare il valore di c in funzione di a. Calcolare la speranza matematica e la varianza di X.

Esercizio 1.3. Sia X una variabile aleatoria continua di densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c(1 + x^2)^{-1} \in \mathbb{R}$$

Determinare il valore di c. Calcolare la funzione di ripartizioneF_X. Calcolare la densità di $Y := X^{-1}$. Calcolare speranza e varianza di X e Y.

Esercizio 1.4. Sia X una variabile aleatoria continua non negativa di densità f e funzione di ripartizione F. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\,\mathrm{d}x$$

e che

$$E[X^k] = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}(1 - F(x))\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 1.5. Sia X una variabile aleatoria che assume valori solo nell'intervallo $[0, a]$ e di densità f. Mostrare ch $\mathrm{Var}(X) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Esercizio 1.6. Il quantile $q_{\frac{1}{2}}$ (se è definito) di una variabile aleatoria X si dice *mediana* di X. I quantili $q_{\frac{1}{4}}$ e $q_{\frac{3}{4}}$ (se sono definiti) di una variabile aleatoria X si dicono *quartili* di X. Calcolare mediana e quartili delle seguenti variabile aleatoria

1. X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;
3. X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Esercizio 1.7. Un *valore modale* di una variabile aleatoria continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è un punto di massimo di f. Calcolare i valori modali delle seguenti variabile aleatoria

1. X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;
3. X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Esercizio 1.8. La *funzione di rischio* di una variabile aleatoria continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è definita come

$$\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 - F_X(x)} & F_X(x) < 1 \\ 0 & F_X(x) = 1. \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità in funzione della sola funzione di rischio

2. Calcolare la funzione di rischio delle seguenti variabile aleatoria

   a) X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);

   b) X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;

   c) X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Esercizio 1.9. Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}(x + y)}{36} & x^2 + y^2 \leq 9,\ x + y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{P}(XY \geq 0)$.

Esercizio 1.10. La v.a. continua X ha densità

$$f(x) = \begin{cases} c & -2 \leq x \leq -1 \\ 2c & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y = X^2$. Calcolare la densità di Y.

Esercizio 1.11. Una v.a. X ha densità

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{-\theta - 1} & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove θ è un parametro positivo incognito. Calcolare, se esiste, la speranza $E[X]$.

Esercizio 1.12. La v.a. continua X ha densità

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1) & x \in [-1,0] \\ c & x \in (0,1] \\ c(2-x) & x \in (1,2] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità della v.a. $Y = X^2$.

Esercizio 1.13. Sia X una v.a. normalmente distribuita con media 2 e varianza 9. Sia Φ la funzione di ripartizione della gaussiana standard. Calcolare $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$ in termini di Φ.

Esercizio 1.14. Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4\pi} & \text{se } (x-2)^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

Esercizio 1.15. Sia X una v.a. normalmente distribuita con media 1 e varianza 4. Sia Φ la funzione di ripartizione della gaussiana standard. Calcolare $\mathbb{P}(|X - 2| \leq 2)$ in termini di Φ

Esercizio 1.16. La produzione settimanale (misurata in kg) di formaggi del caseificio "La mucca Carolina" è una v.a. gaussiana di media $\mu = 1000$ e deviazione standard $\sigma = 50$.

Calcolare la probabilità che la produzione settimanale sia maggiore di 975 kg.