1 Esercizi – Foglio 3

Esercizio 1.1. Lanciamo due dadi non truccati. Dopo aver definito uno spazio di probabilità opportuno, dire quali sono i possibili valori che le seguenti variabile aleatoria possono assumere:
X_1 il punteggio minimo tra i due punteggi,
X_2 il punteggio massimo tra i due punteggi,
X_3 la somma dei due punteggi,
X_4 la differenza tra il punteggio massimo ed il punteggio minimo.
Per ciascuna delle precedenti variabile aleatoria scrivere la densità discreta e la funzione di ripartizione. Tracciare i grafici delle funzioni di ripartizione.

Esercizio 1.2. Lancio una moneta n volte. Supponiamo che ogni lancio sia indipendente e che ad ogni lancio la probabilità che esca testa sia p. Sia X la variabile aleatoria che descrive la differenza tra il numero di teste ed il numero di croci che si ottengono negli n lanci.
1. introdurre un opportuno spazio di probabilità e scrivere X,
2. chi è l'insieme immagine di X?
3. a partire dalla densità binomiale di parametri n e p, $B(n,p)$, calcolare la densità di X.

Esercizio 1.3. Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ. Calcolare $\mathbb{P}(X \text{ è pari})$ e $\mathbb{P}(X \text{ è dispari})$.

Esercizio 1.4. 1. Per ogni fissato λ parametro reale positivo studiare l'andamento della successione

$$p\colon k \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?
2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare l'andamento della funzione

$$f\colon \lambda \in (0,+\infty) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

Esercizio 1.5. Supponiamo che il numero di incidenti giornalieri che avvengono ogni giorno sul tratto di autostrada Firenze–Bologna si distribuisca come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 4$.
1. Qual è la probabilità che oggi accadano 3 incidenti?
2. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti?
3. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti, sapendo che ce n'è sicuramente uno?
4. Qual è la probabilità che accadono 3 incidenti, sapendo che non ne possono accadere più di 10?

Esercizio 1.6. Consideriamo una particella che si muove sul piano Oxy nel seguente modo:

1. al tempo $t = 0$ si trova nell'origine;
2. ad ogni tempo $t = i$ si può spostare in uno dei quattro seguenti modi

a) di una unità verso l'alto con probabilità p_A,
b) di una unità verso il basso con probabilità p_B,
c) di una unità verso destra con probabilità p_D,
d) di una unità verso sinistra con probabilità p_S.

Calcolare la probabilità che al tempo $t = k$ la particella torni nell'origine.

Esercizio 1.7. Lanciamo una moneta in cui esce testa con probabilità p. È più probabile ottenere almeno una testa in due lanci o almeno due teste in quattro lanci?

Esercizio 1.8. Sia

$$p\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+1} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c in modo che p sia una densità. Sia X una variabile aleatoria avente p come propria densità. Calcolare $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

Esercizio 1.9. In una scatola di 10 gomitoli di lana, ce ne sono 6 bianchi e 4 colorati. Si estraggono i gomitoli dalla scatola uno alla volta, senza reiscatolarli. Qual è la probabilità di estrarre il primo gomitolo colorato all'i–esimo tentativo? A quale tentativo devo aspettarmi di estrarre il primo gomitolo colorato? Con quale varianza?

Esercizio 1.10. Il sistema antiincendio di un supermercato è costituito da sei sensori. L'assicurazione copre eventuali danni causati da un incendio se almeno quattro dei sei sensori funzionano. Supponiamo che ogni sensore funzioni, indipendentemente dagli altri, con probabilità dell'80%. Con quale probabilità siamo coperti dall'assicurazione? Quanti sensori ci aspettiamo che funzionino?