Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A7 – 11 Settembre 2012

matricola **cognome e nome** **n. 1**

Domanda 1) (3 punti) Un ristorante propone un menù composto da un primo piatto, un secondo piatto ed un dolce. Il cliente può scegliere tra 4 primi piatti, 3 secondi piatti e 5 dolci. Supponendo che due clienti compongano il proprio pasto scegliendo ciascuna portata a caso (e dunque la scelta di una portata non influenza la scelta delle altre portate), calcolare

- la probabilità $\mathbb{P}_3$ che i due clienti compongano lo stesso pasto;
- la probabilità $\mathbb{P}_0$ che i due clienti compongano due pasti con nessuna portata a comune;
- la probabilità $\mathbb{P}_1$ che i due clienti compongano due pasti con una sola portata a comune;
- la probabilità $\mathbb{P}_2$ che i due clienti compongano due pasti con esattamente due portate a comune;
- il valore atteso E del numero di portate uguali.

$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{60}$, $\mathbb{P}_0 = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}_1 = \frac{13}{30}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{3}{20}$, $E = \frac{47}{60}$

Svolgimento Indico con P, S e D i seguenti eventi:

- P: i due clienti scelgono lo stesso primo piatto $\implies \mathbb{P}(P) = \frac{1}{4}$;
- S: i due clienti scelgono lo stesso secondo piatto $\implies \mathbb{P}(S) = \frac{1}{3}$;
- D: i due clienti scelgono lo stesso dolce $\implies \mathbb{P}(D) = \frac{1}{5}$.

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_3 &= \mathbb{P}(P \cap S \cap D) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(D) = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{5} = \frac{1}{60} \\
\mathbb{P}_0 &= \mathbb{P}(P^c \cap S^c \cap D^c) = \mathbb{P}(P^c)\mathbb{P}(S^c)\mathbb{P}(D^c) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \\
\mathbb{P}_1 &= \mathbb{P}\left((P \cap S^c \cap D^c) \cup (P^c \cap S \cap D^c) \cup (P^c \cap S^c \cap D)\right) = \\
&= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(S^c)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(P^c)\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(P^c)\mathbb{P}(S^c)\mathbb{P}(D) = \frac{13}{30} \\
\mathbb{P}_2 &= 1 - (\mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1) = 1 - \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{5} + \frac{13}{30}\right) = \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

Infine, detta X la v.a. che conta il numero di portate uguali, si ha

$$p_0 = \mathbb{P}_0 = \frac{2}{5}, \quad p_1 = \mathbb{P}_1 = \frac{13}{30}, \quad p_2 = \mathbb{P}_2 = \frac{3}{20}, \quad p_3 = \mathbb{P}_3 = \frac{1}{60}$$

e dunque

$$E = \mathrm{E}[X] = 0\frac{2}{5} + 1\frac{13}{30} + 2\frac{3}{20} + 3\frac{1}{60} = \frac{47}{60}.$$

Domanda 2) (4 punti) Siano X e Y due v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, mentre Y è una v.a. di Poisson di parametro $\lambda = \ln(16)$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(X = 0|Y = k) = 2^{-(k+1)} \quad \mathbb{P}(X = -1|Y = k) = 2^{-2(k+1)} \qquad \forall k = 0, 1, \dots$$

calcolare la densità discreta della v.a. X, il suo valore atteso E e la sua varianza V

$p_{-1} = \frac{1}{32}$, $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = \frac{27}{32}$, $E = \frac{13}{16}$, $V = \frac{55}{256}$

Svolgimento

$$p_{-1} = \mathbb{P}(X = -1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = -1, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = -1|Y = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k-2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{4} e^{\frac{\lambda}{4}} = \frac{1}{4} e^{\frac{-3\lambda}{4}} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{3}{4} 4 \ln 2\right) = \frac{1}{4} 2^{-3} = \frac{1}{32}$$

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0|Y = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} e^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{-\lambda}{2}} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{2} 4 \ln 2\right) = \frac{1}{2} 2^{-2} = \frac{1}{8}$$

$$p_1 = 1 - (p_{-1} + p_0) = 1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{8}\right) = \frac{27}{32}$$

Inoltre

$$\mathrm{E}[X] = -1 \cdot \frac{1}{32} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{27}{32} = \frac{13}{16}$$

e

$$\mathrm{E}[X^2] = 1\frac{1}{32} + 0\frac{1}{8} + 1\frac{27}{32} = \frac{7}{8}$$

Dunque

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{13}{16}\right) 2 = \frac{55}{256}$$

Domanda 3) (3 punti) La v.a. X è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $a > 0$ un parametro e si consideri la v.a. $Y := a\,|X-\mu|$. Calcolare la densità $g(y)$ e il valore atteso E della v.a. Y.

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right) & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}, \qquad E = a\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Svolgimento Calcoliamo prima la funzione di ripartizione della v.a. Y:

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}\left(a\,|X-\mu| \le t\right) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ \mathbb{P}\left(|X-\mu| \le \dfrac{t}{a}\right) & t > 0. \end{cases}$$

Consideriamo il caso $t > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}\left(|X-\mu| \le \frac{t}{a}\right) \mathbb{P}\left(\frac{-t}{a} \le X-\mu \le \frac{t}{a}\right) = \mathbb{P}\left(\mu - \frac{t}{a} \le X \le \mu + \frac{t}{a}\right) =$$
$$= \int_{\mu-\frac{t}{a}}^{\mu+\frac{t}{a}} f(x)\mathrm{d}x$$

dove $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, è la densità della v.a. X.

Dunque, per $t > 0$,

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mu-\frac{t}{a}}^{\mu+\frac{t}{a}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(f\left(\mu + \frac{t}{a}\right) + f\left(\mu - \frac{t}{a}\right)\right) = \frac{2}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\,(a\sigma)^2}\right)$$

e quindi

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right) & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

Infine

$$\int_{\mathbb{R}} |y|\, g(y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{2y}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right) \mathrm{d}y < +\infty$$

e dunque

$$\mathrm{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y g(y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{2y}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right) \mathrm{d}y = \frac{-2a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{-y}{(a\sigma)^2} \exp\left(\frac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{-a\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\,(a\sigma)^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y\to+\infty} = a\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$