Siano X e Y due v.a. indipendenti sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Supponiamo che X sia uniformemente distribuita sull'intervallo $[-1, 1]$ e che Y sia uniformemente distribuita sull'insieme finito $\{-1, 0, 1\}$. Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. $Z = XY$ e tracciarne il grafico.

Svolgimento

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(XY \leq t) = \sum_{k=-1}^{1} \mathbb{P}(XY \leq t, Y = k) = \sum_{k=-1}^{1} \mathbb{P}(kY \leq t, Y = k) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(kY \leq t) = \frac{1}{3}\,\{\mathbb{P}(X \geq -t) + \mathbb{P}(0 \leq t) + \mathbb{P}(X \leq t)\}$$

- $t < -1$

$$F_Z(t) = 0$$

- $t \in [-1, 0)$

$$F_Z(t) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1+t}{2} + 0 + \frac{1+t}{2}\right\} = \frac{t+1}{3}$$

- $t \in [0, 1)$

$$F_Z(t) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1+t}{2} + 1 + \frac{1+t}{2}\right\} = \frac{t+2}{3}$$

- $t \geq 1$

$$F_Z(t) = \frac{1}{3}\,\{1 + 1 + 1\} = 1$$