Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A6 – 12 Luglio 2012

n. 30

Domanda 1) (2 punti) Cappuccetto Rosso può raggiungere la casa della Nonna tramite 6 diversi sentieri, numerati da 1 a 6. Cappuccetto Rosso sceglie quale sentiero percorrere lanciando un dado regolare.
Lungo ciascun sentiero i, $i = 1, \ldots, 6$, la probabilità di incontrare il Lupo è pari a $\frac{1}{2i}$.
Calcolare la probabilità che Cappuccetto Rosso incontri il Lupo.

$$\mathbb{P} = \frac{49}{240}$$

Svolgimento Per $i = 1, \ldots, 6$ sia S_i l'evento "Cappuccetto Rosso sceglie il sentiero i-esimo" e sia L l'evento "Cappuccetto Rosso incontra il Lupo". Abbiamo dunque

$$\mathbb{P}(S_i) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(L|S_i) = \frac{1}{2i}, \qquad \forall i = 1, \ldots, 6.$$

Dunque possiamo calcolare

$$\mathbb{P}(L) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(L \cap S_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(L|S_i)\,\mathbb{P}(S_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2i}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{49}{240}$$

Domanda 2) (4 punti) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti e sono entrambe uniformemente distribuite sull'intervallo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $Y := \max\{X_1, X_2\}$. Calcolare densità, media, varianza e mediana di Y.

$$f_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-a)}{(b-a)^2} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad \mathrm{E}[Y] = \frac{a+2b}{3}, \qquad \mathrm{Var}[Y] = \frac{(b-a)^2}{18}, \qquad \text{mediana di } Y = a + \frac{\sqrt{2}(b-a)}{2}$$

Svolgimento Calcolo la funzione di ripartizione della v.a. Y:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t, X_2 \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t)\mathbb{P}(X_2 \le t) = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^2 & t \in (a,b) \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$

Dunque

$$f_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-a)}{(b-a)^2} & t \in (a,b), \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$
$$E[Y] = \int_a^b t \frac{2(t-a)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a+2b}{3},$$
$$E[Y^2] = \int_a^b t^2 \frac{2(t-a)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3b^2+2ab+a^2}{6},$$
$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{3b^2+2ab+a^2}{6} - \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{18}.$$

Infine, la mediana di Y si calcola risolvendo l'equazione $F_Y(t) = \dfrac{1}{2}$:

$$\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2 = \frac{1}{2}, \qquad a < t < b$$
$$\frac{t-a}{b-a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$t = a + \frac{\sqrt{2}(b-a)}{2}$$

Domanda 3) (4 punti) La v.a. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[0,3]$ mentre la v.a. Y segue la distribuzione binomiale di parametri $n=3$ e $p\in(0,1)$. Inoltre X e Y sono indipendenti.
Calcolare $\mathbb{P}(X+Y\le 3)$ e $\mathbb{P}(XY\le 3)$.

$\mathbb{P}(X+Y\le 3) = 1-p$, $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(XY\le 3) = 1-\frac{5}{2}p^2+\frac{11}{6}p^3$

Svolgimento

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\le 3) &= \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X+Y\le 3, Y=k) = \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X\le 3-k, Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X\le 3-k)\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{3}\frac{3-k}{3}\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}\\
&= (1-p)^3+2p(1-p)^2+p^2(1-p) = (1-p)\left((1-p)^2+2p(1-p)+p^2\right) = 1-p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY\le 3) &= \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(XY\le 3, Y=k) = \mathbb{P}(Y=0)+\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}\left(X\le\frac{3}{k}, Y=k\right)\\
&= \mathbb{P}(Y=0)+\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}\left(X\le\frac{3}{k}\right)\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^3+\sum_{k=1}^{3}\frac{\frac{3}{k}}{3}\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}\\
&= (1-p)^3+\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}\\
&= (1-p)^3+3p(1-p)^2+\frac{1}{2}p^2(1-p)+\frac{1}{3}p^3\\
&= 1-\frac{5}{2}p^2+\frac{11}{6}p^3
\end{aligned}
$$