Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A4 – 12 giugno 2012

n. 30

Domanda 1) (3 punti) Ai fini di uno studio epidemiologico una popolazione è divisa in tre fasce d'età. Il 25% della popolazione appartiene alla prima fascia, il 50 % della popolazione appartiene alla seconda fascia e il restante 25% appartiene alla terza fascia.

- Gli appartenenti alla prima fascia hanno il 6% di probabilità di contrarre il morbo x e l'8% di probabilità di contrarre il morbo y
- Gli appartenenti alla seconda fascia hanno il 3% di probabilità di contrarre il morbo x e il 2% di probabilità di contrarre il morbo y
- Gli appartenenti alla terza fascia hanno il 4% di probabilità di contrarre il morbo x e il 6% di probabilità di contrarre il morbo y

In ciascuna fascia della popolazione i due morbi vengono contratti uno indipendentemente dall'altro.

Un membro della popolazione ha contratto entrambi i morbi. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}$ che egli appartenga alla seconda fascia di popolazione.

$$\mathbb{P} = \frac{1}{7}$$

Svolgimento Siano

- X e Y gli insiemi dei membri della popolazione che hanno contratto, rispettivamente, il morbo x ed il morbo y
- F_1, F_2 e F_3, rispettivamente la prima, la seconda e la terza fascia della popolazione

Sappiamo allora che

$$\mathbb{P}(X \cap Y|F_i) = \mathbb{P}(X|F_i)\mathbb{P}(Y|F_i) \quad i = 1, 2, 3, \qquad \mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X|F_1) = \frac{6}{100}, \quad \mathbb{P}(Y|F_1) = \frac{8}{100}, \quad \mathbb{P}(X|F_2) = \frac{3}{100}, \quad \mathbb{P}(Y|F_2) = \frac{2}{100},$$
$$\mathbb{P}(X|F_3) = \frac{4}{100}, \quad \mathbb{P}(Y|F_3) = \frac{6}{100},$$

Dunque

$$\mathbb{P}(F_2|X \cap Y) = \frac{\mathbb{P}(X \cap Y \cap F_2)}{\mathbb{P}(X \cap Y)} = \frac{\mathbb{P}(X \cap Y|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X \cap Y|F_i)\mathbb{P}(F_i)} = \frac{\mathbb{P}(X|F_2)\mathbb{P}(Y|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X|F_i)\mathbb{P}(Y|F_i)\mathbb{P}(F_i)} =$$
$$= \frac{\frac{3}{100}\frac{2}{100}\frac{1}{2}}{\frac{6}{100}\frac{8}{100}\frac{1}{4} + \frac{3}{100}\frac{2}{100}\frac{1}{2} + \frac{4}{100}\frac{6}{100}\frac{1}{4}} = \frac{1}{7}$$

Domanda 2) (3 punti) Al veriare dei parametri reali positivi c e a si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{c}\right)^a & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determinare c in modo che F sia la funzione di ripartizione di una v.a. continua X e calcolare la funzione densità $f_X(x)$. Al variare del parametro a determinare media, mediana e varianza di X.

$$c = 2,\ f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{2^a} x^{a-1} & \text{se } x \in (0,2) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases},\ \mathrm{E}[X] = \frac{2a}{a+1},\ \text{mediana di } X = 2^{\frac{a-1}{a}},\ \mathrm{Var}[X] = \frac{4a}{(a+2)(a+1)^2}$$

Svolgimento Affinché F sia funzione di ripartizione di una v.a. è necessario e sufficiente cheche $F(2) = 1$, cioè che $c = 2$.
Derivando ottengo la funzione densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{2^a} x^{a-1} & \text{se } x \in (0,2) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^2 \frac{a}{2^a} x^{a-1} x \,\mathrm{d}\,x = \frac{2a}{a+1}$$

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_0^2 \frac{a}{2^a} x^{a-1} x^2 \,\mathrm{d}\,x = \frac{4a}{a+2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \frac{4a}{(a+2)(a+1)^2}$$

La mediana di X è data dall'unico $t \in (0,2)$ tale che $F(t) = \frac{1}{2}$, cioè $t = 2^{\frac{a-1}{a}}$

Domanda 3) (4 punti) La v.a. X segue la distribuzione binomiale di paremtri 2 e $\frac{1}{2}$. La v.a. Y prende valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Sapendo che

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y = j|X = 0) = a|j| \\ &\mathbb{P}(Y = j|X = 1) = b(j + 1) \quad j = -1, 0, 1 \\ &\mathbb{P}(Y = j|X = 2) = c(j + 2) \end{aligned}$$

Determinare i valori delle costanti a, b e c. Calcolare la densità congiunta della v.a. (X, Y).

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{6}$,

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

Svolgimento $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ quindi prende valori in $\{0,\ 1,\ 2\}$ e

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Poiché le probabilità condizionate sono comunque misure di probabilità dobbiamo avere

$$\sum_{j=-1}^{1} \mathbb{P}(Y = j|X = i) = 1 \quad i = 0, 1, 2.$$

Dunque

$$\begin{aligned} a(1 + 0 + 1) = 1 &\implies a = \frac{1}{2} \\ b(0 + 1 + 2) = 1 &\implies b = \frac{1}{3} \\ c(1 + 2 + 3) = 1 &\implies c = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Abbiamo poi, per $i = 0, 1, 2$ e $j = -1, 0, 1$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j|X = i)\mathbb{P}(X = i)$$

Effettuando il clcolo per ciascuna valore di i e di j riempiamo la tabellina delle densità congiunte