Domanda 1) (2 punti) Un'urna contiene 4 palline rosse, 3 palline nere e 3 palline bianche. Si estraggono 3 palline (senza reimbussolare). Si vince se almeno una delle 3 palline estratte è bianca. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_1$ di vincere. Calcolare la probabilità di estrarre 1 pallina bianca, una rossa ed una nera.

$\mathbb{P}_1 = \frac{17}{24} \simeq 0.71$

$\mathbb{P}_2 = \frac{3}{10} = 0.3$

Svolgimento Indico con A l'evento: *viene estratta almeno una bianca.* Allora

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{4+3}{3}}{\binom{4+3+3}{3}} = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{17}{24} \simeq 0.71$$

Inoltre

$$\mathbb{P}_2 = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Domanda 2) (3 punti) Si lancia una moneta non truccata. Se esce testa si lanciano tre dadi, se esce croce si lancia un solo dado. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_1$ di ottenere almeno un "6".
Sapendo di aver ottenuto almeno un "6" calcolare la probabilità $\mathbb{P}_2$ di aver ottenuto testa nel lancio della moneta.

$\mathbb{P}_1 = \dfrac{127}{432} \simeq 0.29$

$\mathbb{P}_2 = \dfrac{91}{127} \simeq 0.72$

Svolgimento Indico con S, T e C i seguenti eventi:

- S: ottengo almeno un 6
- S^c: non ottengo alcun 6
- T: ottengo testa nel lancio della moneta
- C: ottengo croce nel lancio della moneta

Poiché la moneta non è truccata si ha

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 6$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(S \cap (T \cup C)\right) = \mathbb{P}\left(S|C\right)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}\left(S|T\right)\mathbb{P}(T) = \left(\mathbb{P}\left(S|C\right) + 1 - \mathbb{P}\left(S^c|T\right)\right)\frac{1}{2} \\ = \left(\frac{1}{6} + 1 - B\left(3, \frac{1}{6}\right)(\{0\})\right)\frac{1}{2} = \frac{127}{432} \simeq 0.29\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\left(1 - \mathbb{P}(S|T)\right)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\left(1 - B\left(3, \frac{1}{6}\right)(\{0\})\right)\frac{1}{2}}{\frac{127}{432}} = \frac{91}{127} \simeq 0.72$$

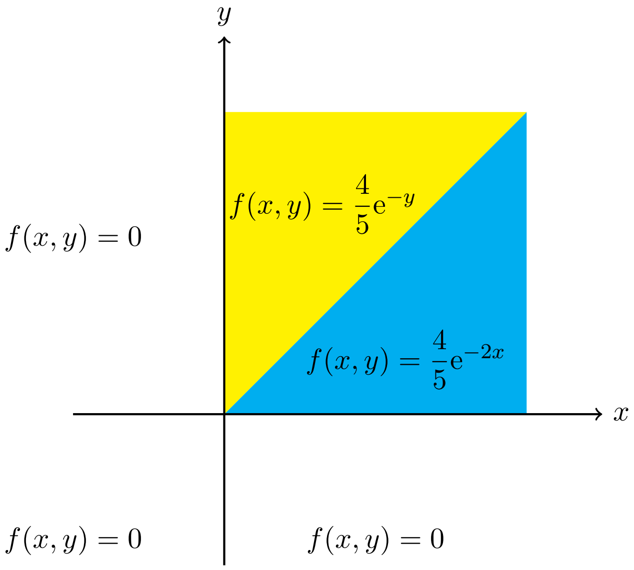
Domanda 3) (5 punti) Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2x} & 0<y<x\\ \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-y} & 0<x<y\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

1. Calcolare la densità di X
2. Calcolare la media di X
3. Calcolare la densità della v.a. $Z:=Y-X$

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\le 0\\ \frac{4}{5}\left(x\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}\right) & \text{se } x>0\end{cases},\qquad \mathrm{E}[X]=1,\qquad g_Z(t)=\begin{cases}\frac{2\mathrm{e}^{2t}}{5} & \text{se } t\le 0\\ \frac{4\mathrm{e}^{-t}}{5} & \text{se } t>0\end{cases}$$

Svolgimento



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & \text{se } x\le 0\\ \int_0^x\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}y+\int_x^{+\infty}\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y & \text{se } x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{se } x\le 0\\ \frac{4}{5}\left(x\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}}|x|f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{4}{5}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=1$$

Quindi la speranza matematica di X è ben definita e

$$\mathrm{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=1,$$

come sopra calcolato.

Calcoliamo innanzitutto la funzione di ripartizione della v.a. Z:

$$G_Z(t)=\mathbb{P}(Z\le t)=\mathbb{P}(Y-X\le t)=\iint_{\{(x,y):\,y-x\le t\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- se $t\le 0$

$$G_Z(t)=\int_{-t}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{x+t}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-t}^{+\infty}\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2x}(x+t)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{5}$$

- se $t > 0$ è più agevole il seguente calcolo:

$$G_Z(t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(Y - X > t) = 1 - \iint_{\{(x,y)\colon\, y-x>t\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 1 - \int_t^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^{y-t} f(x,y)\mathrm{d}x = 1 - \int_t^{+\infty} \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-y}(y-t)\mathrm{d}y = 1 - \frac{4\mathrm{e}^{-t}}{5}$$

Ovvero

$$G_Z(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{5} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^{-t}}{5} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

e dunque

$$g_Z(t) = \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{5} & \text{se } t \leq 0 \\ \dfrac{4\mathrm{e}^{-t}}{5} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$