Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A3 – 22 febbraio 2012

n. 1

Domanda 1) (2 punti) Giovanni possiede sei monete. Tre di queste monete sono eque, una è truccata in modo che esca sempre testa e due sono truccate in modo che esca sempre croce. Giovanni sceglie una moneta a caso e la lancia tre volte. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_1$ di ottenere tre teste.
Sapendo di aver ottenuto tre teste, calcolare la probabilità $\mathbb{P}_2$ di aver scelto la moneta truccata su cui esce sempre testa.

$\mathbb{P}_1 = \frac{11}{48}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{8}{11}$.

Svolgimento Indico con A, E, C e T i seguenti eventi

- A: esce tre volte testa,
- E: seleziono una moneta equa;
- T: seleziono una moneta su cui esce sempre testa;
- C: seleziono una moneta su cui esce sempre croce;

Quindi

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(T) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1 &= \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E) + \mathbb{P}(A \cap T) + \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C) = \\ &= B\left(3, \frac{1}{2}\right)(\{3\}) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{3} = \frac{11}{48}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)} = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{48}{11} = \frac{8}{11}.$$

Domanda 2) (4 punti) Si consideri la v.a. discreta bidimensionale di densità congiunta come in tabella

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 0$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$

Le variabili X e Y sono indipendenti? Sono correlate?
Calcolare $\mathbb{P}(|X| - |Y| = -1)$

Non sono indipendenti, Sono correlate, $\mathbb{P} = \frac{5}{27}$

Svolgimento

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(Y = -1) &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18} \\
\mathbb{P}(X = 0, Y = -1) &= \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Quindi X e Y non sono indipendenti.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Corr}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \left(\frac{-1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{27} + 4 \cdot \frac{2}{27}\right) - \\
&- \left[1 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{27}\right)\right]\left[-1 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\right)\right] = \\
&= 0 - \frac{29}{27} \cdot \frac{13}{54} \neq 0
\end{aligned}$$

Quindi X e Y sono correlate.

Infine

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| - |Y| = -1) = &\mathbb{P}(|X| - |Y| = -1, Y = -1) + \\
&+ \mathbb{P}(|X| - |Y| = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(|X| - |Y| = -1, Y = 2) \\
= &\mathbb{P}(|X| = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(|X| = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(|X| = 1, Y = 2) \\
= &\frac{1}{9} + 0 + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}
\end{aligned}$$

Domanda 3) (4 punti) La v.a. X è assolutamente continua e ha densità $f_X(x)$ definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Y = X^2$. Calcolare

1. la densità di g_Y di Y;
2. la funzione di ripartizione congiunta $F_{(X,Y)}\colon (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto F_{(X,Y)}(s,t) \in \mathbb{R}$ (si consiglia di disegnare il piano Ost e scrivere la funzione di ripartizione in opportune regioni in cui viene diviso tale piano).

$g_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$ $F_{(X,Y)}(s,t) =$vedi figura .

Svolgimento Applicando la formula per la densità del quadrato di una v.a. assolutamente continua si ha

$$g_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le 0, y \ge 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\sqrt{y} + \sqrt{y}\right) & y \in (0,1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le 0, y \ge 1 \\ 1 & y \in (0,1) \end{cases}$$

cioè Y è una v.a. uniformemente distribuita sull'intervallo $(0,1)$.

$$F_{(X,Y)}(s,t) = \mathbb{P}(X \le s, X^2 \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \text{ o se } s \le -1 \\ \mathbb{P}(X \le s, -\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) & \text{se } s > -1 \text{ e } t > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \text{ o se } s \le -1, \\ 1 & \text{se } s \ge 1 \text{ e } t \ge 1, \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \text{ o se } s \le -1 \text{ o se } t > 0 \text{ e } s \le -\sqrt{t}, \\ 1 & \text{se } s \ge 1 \text{ e } t \ge 1, \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Negli altri casi abbiamo

$$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) = \mathbb{P}(X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) - \mathbb{P}(X \le -\sqrt{t}).$$

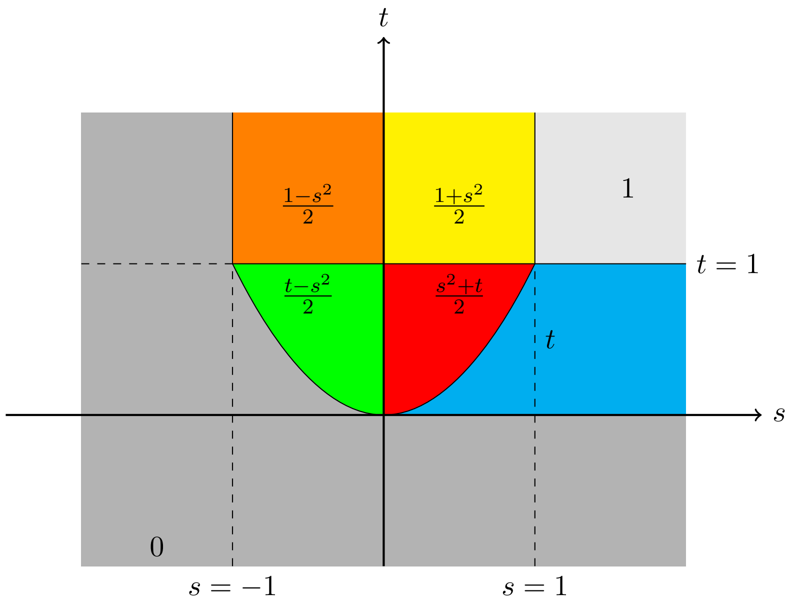
Dunque, se $-\sqrt{t} \le s \le 0$ si ha

$$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) = \mathbb{P}(X \le s) - \mathbb{P}(X \le -\sqrt{t}) = \begin{cases} \dfrac{1-s^2}{2} - \dfrac{1-t}{2} = \dfrac{t-s^2}{2} & -1 \le -\sqrt{t} \le s \le 0 \\ \dfrac{1-s^2}{2} - 0 = \dfrac{1-s^2}{2} & -\sqrt{t} \le -1 \le s \le 0 \end{cases}$$

Se $s \ge 0$ si ha

$$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) = \mathbb{P}(X \le \min\{s, \sqrt{t}\}) - \mathbb{P}(X \le -\sqrt{t}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+\min\{s^2,t\}}{2} - \dfrac{1-t}{2} = \dfrac{\min\{s^2,t\}+t}{2} & -1 \le -\sqrt{t} \le 0 \le s \\ \dfrac{1+s^2}{2} & 0 \le s, \ t \ge 1 \\ \dfrac{1+t}{2} - \dfrac{1-t}{2} = t & 0 \le t \le 1, \ s \ge 1 \end{cases}$$


t
$\frac{1-s^2}{2}$
$\frac{1+s^2}{2}$
1
$t = 1$
$\frac{t-s^2}{2}$
$\frac{s^2+t}{2}$
t
s
0
$s = -1$
$s = 1$