Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A2neve – 6 febbraio 2012

n. 1

Prova orale ☐ Secondo appello ☐ Terzo appello

Domanda 1) (4 punti) Si lancia un dado equo. Se il punteggio è minore o uguale a 2 si lancia una moneta equa. Se il punteggio è maggiore o uguale a 3 si lanciano due monete eque. Sia X la v.a. che conta il numero di teste ottenute. Calcolare media e varianza di X.

$\mathrm{E}[X] = \frac{5}{6}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{17}{36}$.

Svolgimento La v.a. X può assumere solo i valori 0, 1 e 2. Indico con D la v.a. risultato del lancio del dado. Per $k = 0, 1, 2$ si ha

$$\begin{aligned} p_k &:= \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k|D \le 2)\mathbb{P}(D \le 2) + \mathbb{P}(X = k|D \ge 3)\mathbb{P}(D \ge 3) \\ &= B\left(1, \frac{1}{2}\right)(\{k\})\frac{1}{3} + B\left(2, \frac{1}{2}\right)(\{k\})\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- $k = 0$
$$p_0 = \binom{1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-0}\frac{1}{3} + \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
- $k = 1$
$$p_1 = \binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-1}\frac{1}{3} + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$
- $k = 2$
$$p_2 = 1 - p_0 - p_1 = \frac{1}{6}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ \mathrm{E}[X^2] &= 0^2\frac{1}{3} + 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{6} = \frac{7}{6} \\ \mathrm{Var}[X] &= \frac{7}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \end{aligned}$$

Domanda 2) (2 punti) La v.a. X segue una distribuzione gaussiana di media μ. Sapendo che $\mathbb{P}\left(|X-\mu| \leq 1\right) \geq \frac{1}{2}$, calcolare una limitazione per lo squarto quadratico medio di X.

$0 \leq \sigma < 1.49$

Svolgimento Sia X_0 una v.a. che segue la distribuzione gaussiana standard: $X_0 \simeq N(0,1)$. Indicando con σ lo scarto quadratico medio di X, abbiamo che sia X che la v.a. $Y := \mu + \sigma X_0$ seguono la distribuzione gaussiana di parametri μ e σ^2, $N(\mu, \sigma^2)$. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2} \leq \mathbb{P}\left(|X-\mu| \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(|Y-\mu| \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(|\sigma X_0| \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(|X_0| \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1.$$

Dunque deve essere

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) \geq \frac{3}{4} = 0.75.$$

Dalla tabulazione di Φ, ricavo dunque $\frac{1}{\sigma} > 0.67$, cioè $\sigma < 1.49$.

Domanda 3) (4 punti) La v.a. X è distribuita uniformemente sull'intervallo $[0,4]$. Sia $Y = \max\{3X-2, X^2\}$. Calcolare densità e media della v.a. Y.

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \vee t > 16 \\ \dfrac{1}{8\sqrt{t}} & 0 < t < 1 \vee 4 < t < 16 \\ \dfrac{1}{12} & 1 < t < 4. \end{cases}, \qquad E[Y] = \frac{43}{8}$$

Svolgimento Osserviamo che $3X-2 \gtreqless X^2$ se e solo se $(X-1)(X-2) \lesseqgtr 0$. Detta F_Y la funzione di ripartizione di Y si ha dunque

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(X^2 \le t, X \le 1) + \mathbb{P}(3X-2 \le t, 1 < X < 2) + \mathbb{P}(X^2 \le t, X > 2) \\ &= \mathbb{P}(X^2 \le t, X \le 1) + \mathbb{P}(X \le \frac{t+2}{3}, 1 < X < 2) + \mathbb{P}(X^2 \le t, X > 2). \end{aligned}$$

Poiché $X \sim U([0,4])$ si ha

- $t \le 0$
$$F_Y(t) = 0,$$
- $0 < t \le 1$
$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) + 0 + 0 = \frac{\sqrt{t}-0}{4-0} = \frac{\sqrt{t}}{4}$$
- $1 \le t < 4$
$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X \le 1) + \mathbb{P}\left(1 < X < \frac{t+2}{3}\right) + 0 = \mathbb{P}\left(X < \frac{t+2}{3}\right) = \frac{\frac{t+2}{3} - 0}{4-0} = \frac{t+2}{12}$$
- $t > 4$
$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X \le 1) + \mathbb{P}(1 < X < 2) + \mathbb{P}\left(2 < X \le \sqrt{t}\right) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{t}-0}{4-0} & 4 < t \le 16 \\ 1 & t > 16. \end{cases}$$

Dunque, derivando,

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \vee t > 16 \\ \dfrac{1}{8\sqrt{t}} & 0 < t < 1 \vee 4 < t < 16 \\ \dfrac{1}{12} & 1 < t < 4. \end{cases}$$

f_Y è limitata e a supporto compatto, quindi media e varianza di X sono finite. In particolare abbiamo

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 8\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_1^4 \frac{t}{12}\,\mathrm{d}\,t + \int_4^{16} 8\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3}\Bigg|_{t=0}^{t=1} + \frac{t^2}{24}\Bigg|_{t=1}^{t=4} \frac{t^{3/2}}{3}\Bigg|_{t=4}^{t=16} = \frac{43}{8}.$$