**Prova orale** ☐ Secondo appello ☐ Terzo appello

**Domanda 1)** (4 punti) Si hanno due urne. La prima urna contiene quattro palline bianche e quattro palline rosse. La seconda urna contiene sei palline bianche e due palline rosse. Viene selezionata un'urna tra le due. La probabilità che venga selezionata la prima urna è $\frac{1}{3}$. Dall'urna selezionata si estraggono tre palline.
Calcolare la probabilità che delle palline estratte una sia rossa e due siano bianche.
Sapendo che sono state estratte una pallina rossa e due palline bianche, calcolare la probabilità di aver selezionato la prima urna.

$\mathbb{P} = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P} = \frac{2}{7}$ .

**Svolgimento** Indico con $E$, $U_1$ e $U_2$ gli eventi

- $E$: estraggo una pallina rossa e due palline bianche,
- $U_1$ seleziono la prima urna,
- $U_2$ seleziono la seconda urna.

Allora

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(E|U_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{7},$$
$$\mathbb{P}(U_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(E|U_2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28}.$$

Dunque

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(E|U_2)\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{3}\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\frac{15}{28} = \frac{1}{2}.$$

Infine

$$\mathbb{P}(E|U_1) = \frac{\mathbb{P}(E|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\frac{3}{7}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}.$$

**Domanda 2)** (2 punti) $X$ e $Y$ sono due v.a. indipendenti. $X$ segue la distribuzione esponenziale di media $\mu = \frac{1}{2}$, mentre $Y$ segua la distribuzione binomiale $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$.
Calcolare $\mathbb{P}(XY \leq 1)$.

$\mathbb{P}(XY \leq 1) = \frac{1}{9}\left(9 - \exp(-1) - 4\exp(-2)\right)$

**Svolgimento** La v.a. $Y$ ha valori in $\{0,1,2\}$. Possiamo dunque scrivere

$$\{XY \leq 1\} = \{Y = 0\} \cup \{XY \leq 1, Y = 1\} \cup \{XY \leq 1, Y = 2\}$$

dove le unioni sono disgiunte due a due. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY \leq 1) =& \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X \leq 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X \leq 2, Y = 2) = \\
\text{(per l'ipotesi di indipendenza)} \qquad =& \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X \leq 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X \leq 2)\mathbb{P}(Y = 2) = \\
=& \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1 - \exp(-2))\binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \\
& + (1 - \exp(-1))\binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \\
=& \frac{4}{9} + (1 - \exp(-2))\frac{4}{9} + (1 - \exp(-1))\frac{1}{9} = \\
=& \frac{1}{9}\left(9 - \exp(-1) - 4\exp(-2)\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo anche usato il fatto che se $X$ è esponenziale di parametro $\lambda$ e la sua media è $\mu = \frac{1}{2}$, allora $\lambda = \frac{1}{\mu} = 2$ e dunque la sua funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \exp(-2t) & t > 0 \end{cases}$$

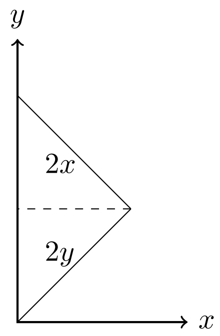
**Domanda 3)** (4 punti) Sia $T$ il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$. La v.a. bidimensionale $(X,Y)$ ha densità $f(x,y)$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{se } (x,y) \in T \text{ e } y \leq 1, \\ 2x & \text{se } (x,y) \in T \text{ e } y > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali $f_X$ e $f_Y$ e la speranza di $Y$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + 2x - 3x^2 & \text{se } \ x \in [0,1], \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2y^2 & \text{se } \ y \in [0,1], \\ (2-y)^2 & \text{se } \ y \in [1,2],, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad E[Y] = \frac{11}{12}.$$

**Svolgimento**




Sicuramente $f_X(x) = 0$ se $x < 0$ o $x > 1$.
Per $x \in [0,1]$ abbiamo

$$f_X(x) = \int_x^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_x^1 2y\mathrm{d}y + \int_1^{2-x} 2x\mathrm{d}y =$$
$$= y^2\Big|_{y=x}^{y=1} + 2xy\Big|_{y=1}^{y=2-x} = 1 + 2x - 3x^2.$$

Inoltre $f_Y(y) = 0$ se $y < 0$ o $y > 2$.
Per $y \in [0,1]$ abbiamo

$$f_Y(y) = \int_0^y 2y\mathrm{d}x = 2yx\Big|_{x=0}^{x=y} = 2y^2.$$

Per $y \in (1,2]$ abbiamo

$$f_Y(y) = \int_0^{2-y} 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_{x=0}^{x=2-y} = (2-y)^2.$$

Infine si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |y| f_Y(y)x\mathrm{d}y = \int_0^2 |y| f_Y(y)x\mathrm{d}y = \int_0^2 y f_Y(y)x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)x\mathrm{d}y$$

Questo integrale è sicuramente finito perchè integro una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato. Quindi

$$E[Y] = \int_0^1 y2y^2\mathrm{d}y + \int_1^2 y(y-2)^2\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^4\Big|_{y=0}^{y=1} + y\frac{1}{3}(y-2)^3\Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{1}{3}(y-2)^3\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(y-2)^4\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$