Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2011-2012

Prova Scritta di Probabilità - A1 – 11 gennaio 2012

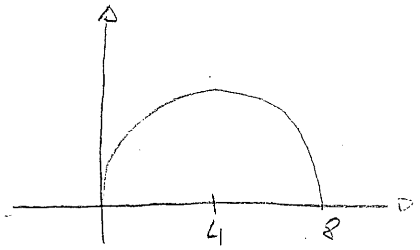
________________ ____ **n. 50**

Prova orale ☐ Primo appello ☐ Secondo appello ☐ Terzo appello

Domanda 1) (5 punti) Una v.a. bidimensionale (X, Y) è uniformemente distribuita nel semicerchio di equazione $(x-4)^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 0$. Calcolare le densità marginali di entrambe le componenti e la speranza matematica della v.a. Y.

$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x \geq 8 \\ \frac{\sqrt{8x-x^2}}{8\pi} & x \in (0,8) \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0, y>4 \\ \frac{1}{4\pi}\sqrt{16-y^2} & y \in [0,4] \end{cases}$, $E[Y] = 16/3\pi$

Svolgimento



$$f(x,y) = \begin{cases} c & (x-4)^2+y^2 \leq 16, \ y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\frac{\pi}{2}16 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8\pi}$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \ x \geq 8 \\ \int_0^{\sqrt{16-(x-4)^2}} \frac{1}{8\pi}\,dy & 0 < x < 8 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0, \ x \geq 8 \\ \frac{1}{8\pi}\sqrt{16-(x-4)^2} & x \in (0,8) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & y<0, \ y>4 \\ \int_{4-\sqrt{16-y^2}}^{4+\sqrt{16-y^2}} \frac{1}{8\pi}\,dx & y \in [0,4] \end{cases} = \begin{cases} 0 & y<0, \ y>4 \\ \frac{1}{4\pi}\sqrt{16-y^2} & y \in [0,4] \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^4 \frac{1}{4\pi} y\sqrt{16-y^2}\,dy = -\frac{1}{4\pi \cdot 3}(16-y^2)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=4}$$

$$= \frac{1}{12\pi}16^{3/2} = \frac{1}{\cancel{12}_{3}\pi}16 \cdot \cancel{4} = \frac{16}{3\pi}$$

Domanda 2) (2 punti) Una v.a. X segue la distribuzione gaussiana di media 6 e varianza 4. Calcolare $\mathbb{P}(|X-8| \leq 1)$ in termini della funzione di ripartizione della gaussiana standard $\Phi(t)$, ristretta a $t \geq 0$.

$\mathbb{P}(|X-8| \leq 1) =$ $\Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

Svolgimento

$X_0 \sim N(0,1) \Rightarrow Y := 6 + 2X_0$ segue la stessa distribuzione di X

$\mathbb{P}(|X-8| \leq 1) = \mathbb{P}(|6+2X_0-8| \leq 1) = \mathbb{P}\left(|X_0 - 1| \leq \frac{1}{2}\right)$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X_0 - 1 \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X_0 \leq \frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

Domanda 3) (3 punti) Lancio due dadi equilibrati. Se il punteggio minimo è minore o uguale a 2 lancio due monete equilibrate; se il punteggio minimo è maggiore o uguale a 3 lancio quattro monete equilibrate. Calcolare la probabilità di ottenere esattamente due teste.

$\mathbb{P} = \quad 9/32$

Svolgimento

$\mathbb{P}(2 \text{ Teste}) = \mathbb{P}(2 \text{ Teste}, \text{lancio } 4 \text{ monete}) + \mathbb{P}(2 \text{ Teste}, \text{lancio } 2 \text{ monete})$

$= \mathbb{P}(2 \text{ Teste} \mid \text{lancio } 4 \text{ monete}) \mathbb{P}(\text{lancio } 4 \text{ monete}) +$
$+ \mathbb{P}(2 \text{ Teste} \mid \text{lancio } 2 \text{ monete}) \mathbb{P}(\text{lancio } 2 \text{ monete})$

$\mathbb{P}(2 \text{ Teste} \mid \text{lancio } 4 \text{ monete}) = \mathcal{B}(4, \tfrac{1}{2})(\{2\}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}$
$= \frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} \frac{1}{2^{\cancel{4}\,2}} = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(2 \text{ Teste} \mid \text{lancio } 2 \text{ monete}) = \mathcal{B}(2, \tfrac{1}{2})(\{2\}) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(\text{lancio } 4 \text{ monete}) = \mathbb{P}(1^\circ \text{dado} \geq 3, 2^\circ \text{dado} \geq 3) =$
$= \mathbb{P}(1^\circ \text{dado} \geq 3)\mathbb{P}(2^\circ \text{dado} \geq 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(\text{lancio } 2 \text{ monete}) = 1 - \mathbb{P}(\text{lancio } 4 \text{ monete}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(2 \text{ Teste}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}(1+2) = \frac{9}{32}$