EDO

Laura Poggiolini

24 ottobre 2011

Indice

1 Edo, problema di Cauchy e soluzioni

Chiamiamo equazione differenziale ordinaria (nel seguito “edo”) di ordine n un'equazione che lega i valori della variabile indipendendente $x \in \mathbb{R}$, di una funzione reale $y = y(x)$ e delle sue derivate y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ di ordine minore o uguale a n, ovvero un'espressione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

con $F\colon A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

Se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo, cioè se è possibile scrivere l'equazione (1) nella forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

con $f\colon B \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, diciamo che la edo è in forma normale.

Esempio 1.1. L'equazione $y' = y^2$ è una edo del primo ordine in forma normale; l'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ è una edo del secondo ordine ancora in forma normale, perché la posso scrivere anche come $y'' = -\omega^2 y$;
l'equazione $|y'| = 1$ non è in forma normale. □

Definizione 1.1. Sia (a, b) un intervallo aperto della retta reale. Diciamo che una funzione $y\colon x \in (a, b) \to y(x) \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale (1) nell'intervallo (a, b) se

1. $y \in C^n((a, b))$;
2. $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in A \quad \forall\, x \in (a, b)$;
3. $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Esempio 1.2. Se c è un parametro reale fissato, la funzione $y(x) = \dfrac{-1}{x - c}$ è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $(-\infty, c)$ ed è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $(c, +\infty)$ ma non è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $\mathbb{R} \setminus \{c\}$.
Se A e B sono due parametri reali fissati, allora la funzione $y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ è soluzione dell'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. □

Conosciamo già un primo esempio di equazione differenziale del primo ordine: $y' = f(t)$ dove $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è una assegnata funzione. Sappiamo che se f è continua in (a, b), allora le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le primitive della funzione f. Fissato un punto $t_0 \in (a, b)$, cioè, le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$y(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s, \quad c \in \mathbb{R}$$

ovvero l'insieme delle soluzioni è una famiglia ad un parametro. Se impongo il valore della funzione in un punto, per esempio $y(t_0) = y_0$, allora la costante c viene determinata:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

In generale, allora, mi aspetto che una edo del primo ordine in forma normale abbia una famiglia ad un parametro di soluzioni e che, fissando il valore della soluzione in un punto la soluzione sia univocamente determinata.

Dati t_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, ed una edo in forma normale del primo ordine

$$y' = f(t, y), \tag{3}$$

il problema di determinare una funzione $y = y(t)$ che sia soluzione dell'equazione differenziale (3) almeno in un intorno del punto t_0 e tale che $y(t_0) = y_0$, si chiama *problema di Cauchy associato all'equazione* $y' = f(t, y)$ *e al dato iniziale* (t_0, y_0) e si scrive

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si può dimostrare che vale il seguente

Teorema 1.1 (Teorema di Cauchy)**.** *Sia $f: (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, ovvero supponiamo che per ogni rettangolo chiuso $R \subset (a, b) \times (c, d)$ esiste L_R tale che*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_R\, |y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1),\ (t, y_2) \in R. \tag{4}$$

Dato $(t_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$, esiste un intervallo aperto $I = (a_0, b_0) \subset (a, b)$, detto intervallo massimale di esistenza*, tale che:*

1. ***(esistenza)*** *$t_0 \in I$ ed esiste $y \in C^1(I)$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

2. ***(massimalità)*** *Se $a_0 > a$, allora esiste $\lim_{t \to a_0^+} y(t) \in \{c, d\}$;*
se $b_0 < b$, allora esiste $\lim_{t \to b_0^-} y(t) \in \{c, d\}$;

3. ***(unicità)*** *il problema di Cauchy* (5) *non ha altre soluzioni in I.*

Corollario 1.2. *Sia $f: (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Sia $I = (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ un intervallo e siano $y_1: t \in I \to \mathbb{R}$ e $y_2: t \in I \to \mathbb{R}$ due soluzioni in I dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$. Allora i grafici di y_1 e di y_2 non si intersecano.*

Dimostrazione. Supponiamo che i grafici di y_1, y_2 si intersechino in un punto $(\bar{t}, \bar{y}) \in I \times (c, d)$. Considero allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\bar{t}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{6}$$

Entrambe le funzioni y_1 e y_2 sono soluzioni del problema di Cauchy (6) nell'intervallo I, dunque, per il Teorema di Cauchy, Teorema 1.1, sono la stessa funzione. □

Più in generale, si definisce il Problema di Cauchy per edo di ordine n:

Definizione 1.2 (Problema di Cauchy)**.** Sia

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

una edo di ordine n in forma normale, con $f\colon B \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.
Fissato $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in B$ chiamiamo *problema di Cauchy* relativo alla edo (7) e al dato iniziale $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ il problema di determinare un intervallo $(a, b) \ni x_0$ ed una funzione $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che

1. y è soluzione dell'equazione (7) in (a, b);
2. Sono soddisfatte le *condizioni iniziali*
   $y(x_0) = y_0$
   $y'(x_0) = y_1$
   ......
   $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

2 Edo a variabili separabili

Consideriamo un tipo molto particolare di edo non lineare, dove la funzione $f(x, y)$ è il prodotto tra una funzione della sola x ed una funzione della sola y.

$$y' = g(x)h(y)\,. \tag{8}$$

Edo della forma (8) si dicono *a variabili separabili*. Osserviamo innanzitutto che se $y_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $h(y_0) = 0$, allora la funzione $y(x) \equiv y_0$ è soluzione dell'equazione (8). Come si determinano le altre soluzioni?

Supponiamo che $y\colon x \in (a, b) \to y(x) \in \mathbb{R}$ sia soluzione dell'equazione (8) e che $h(y(x_0)) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a, b)$. Allora $h(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Di più, $h(y(x))$ ha sempre lo stesso segno di $h(y(x_0))$.

Poiché $y(x)$ è soluzione abbiamo $y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad \forall\, x \in (a, b)$ e poiché $h(y(x))$ non si annulla mai possiamo scrivere, equivalentemente,

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \quad \forall\, x \in (a, b).$$

I due membri dell'uguaglianza devono avere lo stesso integrale indefinito cioè deve essere

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Nell'integrale a primo membro cambio variabile con la sostituzione $y = y(x)$ e ottengo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}\bigg|_{y=y(x)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Cioè, se H è una primitiva di $1/h$ e se G è una primitiva di g, deve essere

$$H(y(x)) = G(x) + C \quad \forall\, x \in (a,b)$$

con C opportuna costante reale.

Sia (c,d) l'immagine di y: $(c,d) = y((a,b))$. Considero la funzione

$$H\colon t \in (c,d) \mapsto H(t) \in \mathbb{R}.$$

$H \in C^1((c,d))$, inoltre $H'(t) = h(t)$ ha segno costante in (c,d). Quindi H è strettamente monotona in un intervallo e dunque invertibile. Dunque, abbiamo una formaula per le soluzioni non costanti della edo $y' = g(x)h(y)$:

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

per qualche $C \in \mathbb{R}$.

3 Il pennello di Peano

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} . \tag{9}$$

qui abbiamo $a(t) = 2$ che è sicuramente una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$ e $b(y) = \sqrt{|y|}$ che non è lipschitziana in alcun intorno di $y = 0$.

Vogliamo far vedere che questo problema di Cauchy ammette infinite soluzioni. Osserviamo che la funzione $y_0(x) \equiv 0$ è soluzione del problema di Cauchy su tutto $\mathbb{R}$.

Vediamo come costruire altre soluzioni dello stesso problema. Supponiamo che $y(t)$ sia una soluzione del problema (9) e che essa sia positiva in un intervallo I.

Per ogni $t \in I$ abbiamo allora

$$y(t)^{\frac{-1}{2}} y'(t) = 2$$

e dunque, integrando memboro a membro

$$2\sqrt{y(t)} = 2t + C \text{ per qualche costante } C \in \mathbb{R}.$$

Definendo $b \equiv \dfrac{-C}{2}$, posso scrivere

$$y(t) = (t-b)^2 \text{ per qualche costante } b \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $b \geq 0$, definisco

$$y_b\colon t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & t \leq b \\ (t-b)^2 & t > b\,. \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Verificare TUTTI i dettagli e provare che per ogni $b \geq 0$ y_b è soluzione del problema di Cauchy (9).

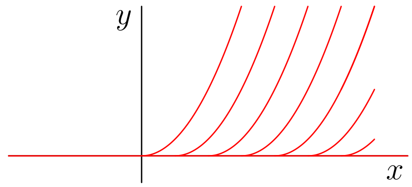

Figura 1: Il pennello di Peano per il problema di Cauchy (9)

4 Edo lineari

Un tipo molto particolare di edo sono le edo lineari, in cui la funzione F è lineare rispetto alle $n+1$ variabili $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Ci limitiamo alle edo lineari in forma normale che scriviamo

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{10}$$

dove le funzioni $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b$ sono continue in un comune intervallo I. Le funzioni $a_1, \ldots, a_n$ si dicono *coefficienti dell'equazione* mentre la funzione b si chiama *termine noto*. Se b è la funzione identicamente nulla, l'equazione si dice *omogenea*.

4.1 Spazi di funzioni

Prima di cominciare lo studio delle edo lineari, diamo alcuni richiami sull'insieme delle funzioni definite in un comune intervallo.

Consideriamo l'insieme delle funzioni definite su un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$:

$$V \equiv \{u \colon u \colon x \in (a, b) \to u(x) \in \mathbb{R}\}$$

Se $u_1, u_2 \in V$, definiamo $u_1 + u_2$ come la funzione che porta $x \in (a, b)$ in $u_1(x) + u_2(x) \in \mathbb{R}$:

$$(u_1 + u_2) \colon x \in (a, b) \to u_1(x) + u_2(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Sicuramente $u_1 + u_2 \in V$. Se $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo λu come la funzione che porta $x \in (a, b)$ in $\lambda u(x) \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda u) \colon x \in (a, b) \to \lambda u(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Anche λu è sicuramente un elemento di V. Verifichiamo che:
V con queste operazioni è uno spazio vettoriale:

1. la funzione 0 definita da $0 \colon x \in (a, b) \to 0 \in \mathbb{R}$ è un elemento di V e, se u è un qualsiasi altro elemento di V si ha:

$$(0 + u)(x) = 0(x) + u(x) = 0 + u(x) = u(x);$$

2. se $u \in V$, la funzione $v\colon x \in (a,b) \to -u(x) \in \mathbb{R}$ è un elemento di V e si ha
$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) = u(x) - u(x) = 0;$$

3. siano u_1, $u_2 \in V$
$$(u_1+u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) = u_2(x) + u_1(x) = (u_2+u_1)(x);$$

4. siano u_1, u_2, $u_3 \in V$
$$\begin{aligned}&[(u_1+u_2)+u_3](x) = (u_1+u_2)(x) + u_3(x) = \\ &u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) = u_1(x) + (u_2+u_3)(x) = [u_1 + (u_2+u_3)](x);\end{aligned}$$

5. sia $u \in V$:
$$(1u)(x) = 1u(x) = u(x);$$

6. sia $u \in V$ e siano λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$$[(\lambda_1+\lambda_2)u](x) = (\lambda_1+\lambda_2)u(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(x) = (\lambda_1 u)(x) + \lambda_2 u)(x);$$

7. sia $u \in V$ e siano λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$$[(\lambda_1\lambda_2)u](x) = (\lambda_1\lambda_2)u(x) = \lambda_1(\lambda_2 u(x)) = (\lambda_1(\lambda_2 u))(x);$$

8. siano u_1, $u_2 \in V$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$[\lambda(u_1+u_2)](x) = \lambda[u_1(x) + u_2(x)] = \lambda u_1(x) + \lambda u_2(x) = (\lambda u_1 + \lambda u_2)(x).$$

È inoltre facile dimostrare che

Proposizione 4.1. *L'insieme delle funzioni di classe $C^n((a,b))$*
$$W := \{u\colon x \in (a,b) \to \mathbb{R}\colon u \in C^n((a,b))\}$$
è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione 4.1. Ricordiamo che $u \in C^n((a,b))$ significa che u è una funzione definita su (a,b) a valori reali, derivabile almeno n volte e tale che u, u', $u'' \ldots u^{(n)}$ sono funzioni continue sull'intervallo (a,b)

Dimostrazione. Per la dimostrazione si sfruttino le proprietà di linearità dell'operazione di derivazione. □

4.2 Struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea

Consideriamo ora la edo lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{11}$$

dove i coefficienti a_i, $i = 1, \ldots, n$ sono funzioni continue su un intervallo I. Definisco l'operatore

$$L\colon y \in C^n(I) \mapsto y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \in C^0(I). \tag{12}$$

L è un operatore lineare tra spazi vettoriali, dunque il suo nucleo $\ker(L)$ è un sottospazio vettoriale del dominio $C^n(I)$. Ma $\ker(L)$ è proprio l'insieme delle soluzioni in I della (11). Dunque abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione 4.2. *Sia* (11) *una edo lineare omogenea a coefficienti continui in un intervallo I. L'insieme delle soluzioni della* (11) *in I è un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$.*

Esercizio 4.1. Dimostrare che l'operatore L definito nella (12) è effettivamente un operatore lineare.

In realtà vale un teorema molto più forte che è il seguente e che dimostreremo solo nei casi particolari $n = 1$ e $n = 2$.

Teorema 4.1. *L'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea di ordine n a coefficienti continui in un intervallo I è uno sottospazio vettoriale di $C^n(I)$ di dimensione n.*

4.3 Struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea

Consideriamo ora una edo lineare non omogenea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{13}$$

Ricorrendo di nuovo all'operatore L definito nella (12) abbiamo che l'insieme delle soluzioni di (13) in I è dato da tutte e sole le funzioni $y \in C^n(I)$ tali che $(Ly)(x) = b(x)$ $\forall x \in I$, cioè tali che $Ly = b$ (uguaglianza tra elementi dello spazio vettoriale $C^0(I)$).

Proposizione 4.3. *Sia $\overline{v}$ soluzione della edo lineare non omogenea* (13) *in un intervallo I, allora l'insieme delle soluzioni di* (13) *è dato da tutte e sole le funzioni della forma $v = \overline{v} + u$, al variare di u nello spazio vettoriale delle soluzioni della edo lineare omogenea* (10) *associata a* (13).

Dimostrazione. 1. Sia $v = \overline{v} + u$, con u soluzione della edo omogenea associata (10). Faccio vedere che v è soluzione della (13). Sappiamo che

$$L\overline{v} = b$$
$$Lu = 0$$

Dunque

$$Lv = L(\overline{v} + u) = L\overline{v} + Lu = b + 0 = b$$

cioè v è soluzione della edo (13).

2. Viceversa, ora facciamo vedere che ogni soluzione della (13) si può scrivere nella forma voluta. Sappiamo che

$$L\overline{v} = b$$
$$Lv = b$$

Definisco $u := v - \overline{v}$. Abbiamo

$$Lu = L(v - \overline{v}) = Lv - L\overline{v} = b - b = 0.$$

Dunque u è soluzione della edo omogenea associata e d'altra parte $u = v - \overline{v}$ implica $v = \overline{v} + u$. □

4.4 Il caso n = 1

4.4.1 Edo lineare omogenea

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Vogliamo dimostrare che se $a \in C^0(I)$, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y' + a(x)y = 0 \tag{14}$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione uno di $C^1(I)$. Dimostriamo questo risultato trovando esplicitamente tutte e sole le soluzioni di (14).

Proposizione 4.4. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $a \in C^0(I)$. Allora le soluzioni di* (14) *sono definite su tutto l'intervallo I e sono tutte e sole le funzioni*

$$u(x) = C\exp(A(x)) \qquad C \in \mathbb{R} \tag{15}$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi fissata primitiva di $-a(x)$.

Dimostrazione. Osserviamo che poiché a è continua in I, il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che una primitiva A esiste ed è $C^1(I)$, dunque anche le funzioni $x \mapsto C\exp(A(x))$ sono di classe $C^1(I)$.
Verifichiamo ora che una funzione u della forma (15) è soluzione di (14). Abbiamo $u'(x) = -a(x)C\exp(A(x))$ e dunque

$$u'(x) + a(x)u(x) = -a(x)C\exp(A(x)) + a(x)C\exp(A(x)) = 0\,.$$

Viceversa, supponiamo ora che v sia una soluzione di (14) e dimostriamo che deve essere della forma $C \exp(A(x))$. Osserviamo che $v(x) = C \exp(A(x))$ se e solo se $v(x) \exp(-A(x)) = C$. Consideriamo allora la funzione prodotto $c(x) \equiv v(x) \exp(-A(x))$ e dimostriamo che è costante. Poiché c è di classe C^1 nell'intervallo I, basta dimostrare che la sua derivata è identicamente nulla. Abbiamo

$$c'(x) = v'(x) \exp(-A(x)) + a(x)v(x) \exp(-A(x)) \,.$$

Ma v è soluzione di (14) e dunque

$$c'(x) = -a(x)v(x) \exp(-A(x)) + a(x)v(x) \exp(-A(x)) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

$\square$

4.4.2 Edo lineare non omogenea

Per la Proposizione 4.3, se troviamo almeno una soluzione $\overline{v}$ della edo

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{16}$$

avremo automaticamente trovato tutte le soluzioni, che dovranno essere (per la Proposizione 4.4) della forma $\overline{v} + C \exp(A(x))$, $C \in \mathbb{R}$, dove A è una qualche primitiva di $-a(x)$. La cerchiamo nella forma $\overline{v}(x) = B(x) \exp(A(x))$ (questo metodo di ricerca di soluzioni particolari si chiama *metodo della variazione delle costanti*). Abbiamo

$$\overline{v}'(x) = B'(x) \exp(A(x)) - a(x)B(x) \exp(A(x))$$

e dunque se $\overline{v}(x)$ è soluzione di (16) deve essere

$$B'(x) \exp(A(x)) - a(x)B(x) \exp(A(x)) + a(x)B(x) \exp(A(x)) = b(x)$$

cioè

$$B'(x) = \exp(-A(x))b(x).$$

Fissiamo allora $B(x)$ primitiva di $\exp(-A(x))b(x)$ (per il teorema fondamentale del calcolo integrale B esiste ed è $C^1(I)$) e consideriamo

$$\overline{v}(x) = B(x) \exp(A(x)).$$

Anche $\overline{v}$ è di classe $C^1(I)$. Inoltre, calcolando $\overline{v}'(x)$ e sostituendolo in (16) otteniamo che $\overline{v}$ è soluzione dell'equazione.

Applicando la proposizione (4.3) otteniamo

Proposizione 4.5. *Le soluzioni dell'equazione* (16) *sono tutte e sole le funzioni*

$$v(x) = (C + B(x)) \exp(A(x)) \quad C \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $-a(x)$ e $B(x)$ è una primitiva di $\exp(-A(x))b(x)$.

4.5 Il caso n = 2

Vale il seguente Teorema di Cauchy (che non dimostriamo)

Teorema 4.2. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $x_0 \in I$ e siano y_0, $v_0 \in \mathbb{R}$. Siano a_1, a_2, b funzioni continue in I. Allora esiste una ed una sola soluzione $C^2(I)$ del problema*

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0. \end{cases}$$

4.5.1 Edo lineare omogenea

Definizione 4.1. Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono funzioni di classe C^{n-1} su un comune intervallo I, la funzione

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \colon x \in I \mapsto \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

è detta *wronskiano delle funzioni* $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Teorema 4.3. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e siano a_1, a_2 funzioni continue in I. Siano y_1 e y_2 soluzioni della edo lineare omogenea*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Allora y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti in I se e solo $\exists x_0 \in I$ tale che $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. In particolare $\exists x_0 \in I$ tale che $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ se e solo se $W(y_1, y_2)(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. Supponiamo che $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ e dimostriamo che y_1 e y_2 sono funzioni linearmente dipendenti in I. $W(y_1, y_2)(x_0)$ è il determinante del sistema lineare

$$\begin{aligned} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) &= 0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Poiché per ipotesi il determinante è nullo, il sistema (17) ammette almeno una soluzione non nulla (α, β). Considero il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

La funzione identicamente nulla in I, $x \in I \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ è soluzione, ma anche la funzione $z \colon x \in I \mapsto \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \in \mathbb{R}$ è soluzione, dunque $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ $\forall x \in I$, ovvero y_1 e y_2 sono funzioni linearmente dipendenti.
L'implicazione opposta è banale. $\square$

Teorema 4.4. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $x_0 \in I$ e siano a_1, a_2, b, funzioni continue in I.*

1. *Sia y_1 la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 & \text{in } I \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e sia y_2 la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 & \text{in } I \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1. \end{cases}$$

Allora y_1 e y_2 sono funzioni linearmente indipendenti in I.

2. *Le soluzioni della edo lineare omogenea*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{18}$$

sono tutte e sole le

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

3. *Sia $\overline{y}(x)$ una soluzione della edo lineare completa*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \tag{19}$$

Allora le soluzioni di (19) sono tutte e sole le funzioni

$$y(x) = \overline{y}(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Dimostrazione. 1. La lineare indipendenza delle funzioni y_1 e y_2 è diretta conseguenza del Teorema 4.3:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

2. È chiaro che tutte le funzioni $\alpha y_1 + \beta y_2$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ sono soluzioni della edo (18). Viceversa: supponiamo che la funzione $z\colon x \in I \mapsto z(x) \in \mathbb{R}$ sia soluzione della (18) e dimostriamo che è combinazione lineare delle funzioni y_1 e y_2. Considero il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 & \text{in } I \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y'(x_0) = z'(x_0). \end{cases}$$

La funzione z è sicuramente soluzione di questo problema, ma anche la funzione $\tilde{y} := z(x_0)y_1 + z'(x_0)y_2$ lo è. Dunque, per il Teorema 4.2, $z = \tilde{y}$, cioè z è combinazione lineare di y_1 e y_2, a coefficienti $z(x_0)$ e $z'(x_0)$.

3. È conseguenza del punto 1. e della Proposizione 4.3.

□

4.5.2 Edo lineare omogenea a coefficienti costanti

Nel caso particolare in cui i coefficienti siano delle costanti, siamo in grado di determinare esplicitamente una base dello spazio vettoriale delle soluzioni: consideriamo la edo

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{21}$$

con $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché per l'equazione lineare omogenea del primo ordine a coefficienti costanti $y' + ay = 0$ una base dello spazio dello soluzioni è la funzione $y(x) = \exp(-ax)$ cerchiamo, per analogia, soluzioni della forma $y(x) = \exp(\lambda x)$. Sostituendo nella (21) osserviamo che la funzione $y(x) = \exp(\lambda x)$ ne è soluzione se e solo se λ è radice del polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Definizione 4.2. Definiamo *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale (21) il polinomio

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{22}$$

Distinguiamo tre casi:

1. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$. In questo caso il polinomio caratteristico ha due radici reali e distinte λ_1 e λ_2, allora le due funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}\,, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}\,.$$

   sono entrambe soluzione dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}$. Utilizzando il Teorema 4.3 proviamo che sono anche linearmente indipendenti: calcoliamo il wronskiano in $x_0 = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

2. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$. In questo caso il polinomio caratteristico ha una radice reale doppia $\lambda = \dfrac{-\,a_1}{2}$. La funzione

$$y_1(x) = e^{\lambda x}$$

   è dunque soluzione dell'equazione differenziale. Cerco una soluzione linearmente indipendente con il metodo di variazione delle costanti

$$y_2(x) = C(x)\exp(\lambda x)$$

Sostituendo nella edo (21) abbiamo che y_2 è soluzione se e solo se

$$C''(x) = 0.$$

Scelgo $C(x) \equiv x$ e ottengo la soluzione $y_2(x) = x \exp(\lambda x)$. Se y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, allora ho concluso.

Proviamo che sono anche linearmente indipendenti, di nuovo utilizzando il Teorema 4.3. Scelgo $x_0 = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

3. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$. In questo caso il polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate $\lambda_1 = \mu + i\omega$ e $\lambda_2 = \mu - i\omega$ con $\omega > 0$. Le due funzioni

$$z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = \exp(\mu x)(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x))$$
$$z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = \exp(\mu x)(\cos(\omega x) - i \sin(\omega x))$$

sono dunque entrambe soluzione dell'equazione differenziale però sono funzioni a valori complessi. Pongo

$$y_1 := \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad y_1 := \frac{z_1 - z_2}{2i}$$

Abbiamo

$$y_1(x) = \exp(\mu x) \cos(\omega x) \qquad y_2(x) = \exp(\mu x) \sin(\omega x)$$

y_1 e y_2 sono due funzioni a valori reali e per linearità sono soluzioni della edo (21).

Proviamo che sono anche linearmente indipendenti: scelgo $x_0 = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \mu & \omega \end{vmatrix} = \omega \neq 0.$$

4.5.3 Il metodo della variazione delle costanti

Consideriamo ora l'equazione completa a coefficienti costanti

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(x) \tag{23}$$

Descriviamo qui un metodo che, almeno in linea di principio, permette di risolvere questa equazione, per qualsiasi funzione continua g. Siano y_1 e y_2 le due soluzioni dell'equazione omogenea associate trovate precedentemente tramite lo studio del polinomio caratteristico. Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa (23) della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\,. \tag{24}$$

Abbiamo dunque

$$\overline{y}'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Vi sono due funzioni incognite c_1 e c_2 e dobbiamo soddisfare una sola equazione, possiamo imporre una condizione supplementare: imponiamo che la funzione $\overline{y}$ si possa derivare come se le funzioni c_1 e c_2 fossero costanti, cioè imponiamo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{25}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
&\overline{y}'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\\
&\overline{y}''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)
\end{aligned}$$

Sostituendo nella edo (23) e ricordando che y_1 e y_2 sono soluzioni della edo omogenea associata, abbiamo che $\overline{y}$ è soluzione della stessa se e solo se

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)\,.$$

Ponendo a sistema con la condizione (25) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0\\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)\,. \end{cases}$$

È un sistema lineare 2×2 nelle incognite c_1' e c_2'. Il determinante è $W(y_1, y_2)(x)$ che è non nullo perhè y_1 e y_2 sono funzioni linearmnebte indipendenti. Dunque si ricava

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,.$$

Si tratta dunque di trovare una primitiva di ciascuno di questi due rapporti. Vediamo un esempio

Esempio 4.1. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos(x)}$. L'equazione omogenea associata è $y'' + y = 0$ che ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + \lambda = 0$. Troviamo dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea:

$$y_1(x) = \cos(x) \qquad y_2(x) = \sin(x)\,.$$

Cerchiamo dunque una soluzione del tipo $\overline{y}(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x)$, da cui $\overline{y}'(x) = c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) - c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos x$. Imponiamo

$$c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) = 0\,.$$

Derivando ancora otteniamo

$$\overline{y}''(x) = -c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) - c_1(x)\cos(x) - c_2(x)\sin(x)\,.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$$-c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

e dunque il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$c_1'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \qquad c_2'(x) = 1\,.$$

Dunque

$$c_1(x) = \ln|\cos(x)| \qquad c_2(x) = x\,.$$

e

$$\overline{y}(x) = \ln|\cos(x)|\cos(x) + x\sin(x)\,.$$

Le soluzioni dell'equazione saranno allora tutte e sole le funzioni

$$y(x) = (a + \ln|\cos(x)|)\cos(x) + (b + x)\sin(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

□

4.5.4 Schema per la ricerca di una soluzione dell'equazione $y'' + a_1y' + a_2y = g(x)$ per alcuni tipi particolari di funzioni $g(x)$

1. $g(x) = e^{\gamma x}P_n(x)$
   a) Se γ non è radice del polinomio caratteristico $\lambda^2+a_1\lambda+a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

      $$\overline{y}(x) = e^{\gamma x}Q_n(x)$$

      dove Q_n è un polinomio di grado n.

   b) Se γ è radice semplice del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

      $$\overline{y}(x) = xe^{\gamma x}Q_n(x)$$

      dove Q_n è un polinomio di grado n.

   c) Se γ è radice doppia del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

      $$\overline{y}(x) = x^2e^{\gamma x}Q_n(x)$$

      dove Q_n è un polinomio di grado n.

2. $g(x) = e^{\gamma x} \left(P_n(x) \cos(\omega x) + Q_m(x) \sin(\omega x) \right)$
   Definiamo $N \equiv \max\{n, m\}$.
   a) Se $\gamma \pm i\omega$ non sono le radici complesse coniugate del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

   $$\overline{y}(x) = e^{\gamma x} \left(S_N(x) \cos(\omega x) + T_N(x) \sin(\omega x) \right)$$

   dove S_N e T_N sono due polinomi di grado N.
   b) Se $\gamma \pm i\omega$ sono le radici complesse coniugate del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

   $$\overline{y}(x) = x e^{\gamma x} \left(S_N(x) \cos(\omega x) + T_N(x) \sin(\omega x) \right)$$

   dove S_N e T_N sono due polinomi di grado N.

Osservazione 4.2. Il caso $\gamma = 0$ rientra in questa casistica. Che forma hanno le funzioni g e $\overline{y}$ in questo caso?

Osservazione 4.3. Il caso $n = 0$ e/o $m = 0$ rientra in questa casistica. Che forma hanno le funzioni g e $\overline{y}$ in questo caso?

4.5.5 Principio di sovrapposizione

Teorema 4.5 (Principio di sovrapposizione)**.** *Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) \tag{26}$$

Se $\overline{u_i}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g_i(x)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

allora la funzione $\overline{u}(x) = \overline{u_1}(x) + \overline{u_2}(x) + \ldots + \overline{u_n}(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale (26).

5 Combinazioni lineari di funzioni trigonometriche

Facciamo vedere che ogni funzione del tipo $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ con A, $B \in \mathbb{R}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come $R\cos(\omega t + \varphi)$ con $R > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Dimostrazione.

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t + \varphi)$$

se e solo se

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t)\cos\varphi - R\sin(\omega t)\sin\varphi\,.$$

Poiché $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ sono due funzioni linearmente indipendenti, questo equivale a

$$\begin{cases} A = R\cos(\varphi) \\ B = -R\sin(\varphi) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} R = \sqrt{A^2+B^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \quad \sin\varphi = \dfrac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \end{cases}$$

□

6 Vibrazioni lineari

Consideriamo una massa puntiforme (P, m) vincolata a muoversi lungo una retta. Supponiamo che essa sia soggetta ad una forza elastica di richiamo $\vec{F}_e = -k(P-O)$ $(k > 0)$ e ad una resistenza viscosa $\vec{F}_r = -\mu\dot{P}$ $(\mu \geq 0)$. Introduciamo un sistema di riferimento lungo la retta in questo modo: scegliamo un orientamento e poniamo l'origine nella posizione di riposo della forza elastica. Detto $\vec{i}$ il versore che indica direzione e verso della retta così orientata abbiamo:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -k(P-O) = -kx\vec{i} \\ \vec{F}_r &= -\mu\dot{P} = -\mu\dot{x}\vec{i} \\ \vec{a} &= \ddot{x}\vec{i}\,. \end{aligned}$$

La legge della dinamica $m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_r$ assume la forma

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{27}$$

Supponiamo di conoscere lo stato iniziale della nostra particella:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \tag{28}$$

1. $\mu = 0$: non c'è resistenza viscosa.
   L'equazione (27) diventa
   $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$
   Il polinomio caratteristico associato è
   $$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$
   le cui radici sono $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Poniamo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e dunque $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Le soluzioni sono dunque tutte e sole le funzioni
   $$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi)\,.$$

Imponiamo le condizioni iniziali (28):

$$\begin{cases} x_0 = R\cos(\varphi) \\ v_0 = -\omega_0 R\sin(\varphi) \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$R = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\,, \quad \sin(\varphi) = \frac{-\frac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,, \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}$$

La particella si muove dunque di moto armonico avente

a) ampiezza $R = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

b) sfasamento $\varphi \in [0, 2\pi)$ individuato da

$$\sin(\varphi) = \frac{-\frac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,, \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,,$$

c) frequenza $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e

d) periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

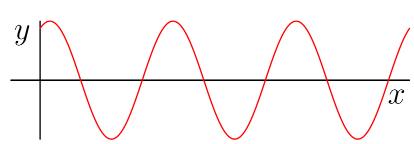

Figura 2: Moto armonico

2. $\mu > 0$ e $\Delta = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2} < 0$. Il polinomio caratteristico associato all'equazione (27) è

$$\lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

le cui radici complesse coniugate sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

Per brevità indichiamo $\gamma = \dfrac{\mu}{2m} > 0$ e $\omega_0 = \dfrac{\sqrt{4mk-\mu^2}}{2m} > 0$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = \exp(-\gamma t) R \cos(\omega_0 t + \varphi)\,. \tag{29}$$

Un moto di questo tipo si chiama *moto armonico smorzato*. Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$\begin{cases} R = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{-(v_0+\gamma x_0)}{\omega_0\sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2}}\,, \quad \cos(\varphi) = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2}}\,. \end{cases}$$

Da (29) osserviamo che $|x(t)| \le R\exp(-\gamma t)$ e quindi $x(t)$ converge a 0 con velocità esponenziale quando $t \to +\infty$.

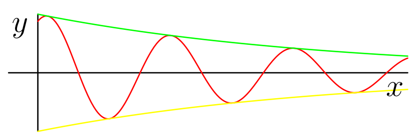

Figura 3: Moto armonico smorzato

3. $\mu > 0$ e $\Delta = \dfrac{\mu^2 - 4km}{m^2} = 0$ cioè $\mu = 2\sqrt{km}$. Il polinomio caratteristico associato all'equazione (27) è

$$\left(\lambda + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 = 0$$

la cui unica radice è $\lambda = -\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, con molteplicità 2. Poniamo $\gamma \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, quindi le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\gamma t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0 + \gamma x_0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \;\; x(t) = (x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t)\, e^{-\gamma t}\,.$$

Un moto di questo tipo si dice con *smorzamento critico*. Poiché $\gamma > 0$ anche in questo caso possiamo dire che $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

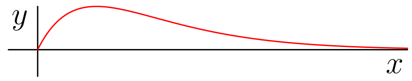

Figura 4: Moto criticamente smorzato

4. $\mu > 0$ e $\Delta = \dfrac{\mu^2 - 4km}{m^2} > 0$. Le soluzioni del polinomio caratteristico sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$$

Per la regola dei segni di Cartesio sia λ_1 che λ_2 sono negative. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}\,;$$

ed imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$A = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\,, \quad B = \frac{-(\lambda_1 x_0 - v_0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\,,$$

da cui

$$x(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

Il moto si dice *con smorzamento supercritico.*

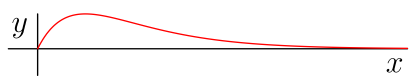

Figura 5: Moto con smorzamento supercritico

Supponiamo ora che la particella sia sottoposta ad una ulteriore forza $\vec{F}(t) = F(t)\vec{i}$ dipendente soltanto dal tempo. La legge di moto in questo caso è

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}\,.$$

In linea di principio, mediante il metodo della variazione delle costanti, è possibile risolvere questa equazione. Nel caso $\mu > 0$ si può dimostrare che

1. se $F(t)$ è limitata, allora anche $x(t)$ è limitata;
2. se $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$, allora anche $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Non lo dimostriamo. Facciamo vedere però che per $\mu = 0$ queste conclusioni non sono più vere. Supponiamo di avere $F(t) = M\cos(\omega t)$, $M > 0$.

1. $\omega \neq \omega_0$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{M\cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Per semplicità supponiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia ferma ($v_0 = 0$) nella posizione di equilibrio ($x_0 = 0$). Imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$x(t) = \frac{M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right),$$

ovvero, applicando le formule di prostaferesi:

$$x(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right)$$

cioè $x(t)$ è il prodotto di due funzioni oscillanti una delle quali oscilla più velocemente dell'altra. Questo fenomeno si chiama *dei battimenti.*

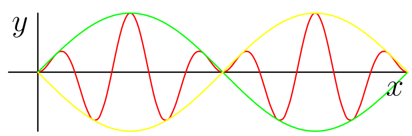

Figura 6: Fenomeno dei battimenti

2. $\omega = \omega_0$. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{Mt\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$$

Per semplicità supponiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia ferma ($v_0 = 0$) nella posizione di equilibrio ($x_0 = 0$). Imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$x(t) = \frac{Mt\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$$

cioè la soluzione oscilla tra le due rette $y(t) = \dfrac{Mt}{2m\omega_0}$ e $y(t) = \dfrac{-Mt}{2m\omega_0}$. In questo caso, anche se la forza esterna F è limitata, la soluzione $x(t)$ non lo è. Questo fenomeno si chiama *risonanza.*

7 Esercizi svolti e/o proposti

7.1 Teoria generale

Esercizio 7.1. Riferito il piano verticale ad un sistema di coordinate cartesiane Oxy, in cui l'asse y è verticale e diretto verso l'alto, supponiamo che il grafico

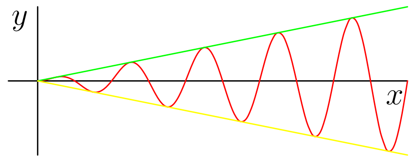

Figura 7: Fenomeno della risonanza

$(x, y(x))$ di una funzione regolare $y = y(x)$ rifletta una sorgente luminosa proveniente uniformemente dall'alto convogliando i raggi riflessi in un punto (a, b). Verificare che per ogni $\alpha \neq 0$ la funzione $y = \alpha(x-a)^2 + a - \dfrac{1}{4\alpha}$ è soluzione del problema e che è nessuna altra parabola con asse parallelo all'asse y è soluzione del problema.

Esercizio 7.2. Verificare che le funzioni $y_+ \colon x \in (0, +\infty) \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ e $y_- \colon x \in (-\infty, 0) \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{30}$$

Sia $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} y_+(x) & x > 0 \\ y_-(x) & x < 0. \end{cases}$$

È possibile estendere per continuità la funzione f a tutto $\mathbb{R}$? In caso affermativo, che regolarità ha la funzione estesa? È soluzione dell'equazione (30) su tutto $\mathbb{R}$?

7.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

Esercizio 7.3. Al variare del parametro reale α, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

indicando esplicitamente il dominio della soluzione.

Esercizio 7.4. Trovare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy indicandone il dominio.

$$\begin{cases} y' = 4x + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + x^3y^4 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + x^3y^4 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y' = \tan(y) \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

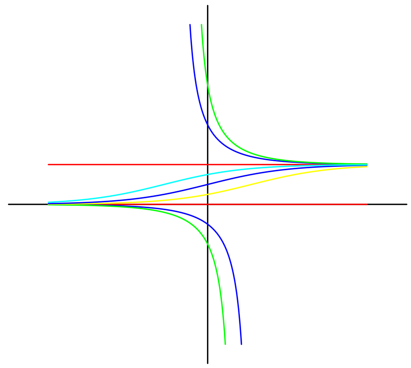

Figura 8: Le soluzioni dell'equazione logistica $y' = y - y^2$

7.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Esercizio 7.5. Calcolare il valore per $t = 2$ della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\ln(t) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7.6. Calcolare il valore per $t = 2$ della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{t} - \dfrac{1}{t} - 1 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7.7. Tra tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = -2y\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x},$$

determinare se ne esiste una tale che $\lim_{x\to 0+} y(x)$ esiste finito.

Esercizio 7.8. Tra tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{-1}{x}y + \frac{1}{x(1+x)},$$

determinare se ne esiste una tale che $\lim_{x\to 0+} y(x)$ esiste finito.

Esercizio 7.9. Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando chiaramente il dominio della soluzione:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln(x^2)}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7.10. Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y' + 2y = e^t\,, \quad y' + 2y = e^{-2t}\,, \quad y' - y = \sin(x)\,.$$

Esercizio 7.11. Integrare le seguenti equazioni differenziali:

$$t(1+y^2)y' = 3 \qquad (1+t^3)y' - t^2 y = 0 \qquad y' = \frac{2xy}{x^2-1}$$

Esercizio 7.12. Risolvere il Problema di Cauchy

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)}, \qquad y(-1) = 0$$

e indicare qual è l'intervallo massimale su cui la soluzione è definita.

Esercizio 7.13. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'quazione differenziale

$$y'(x) = \frac{-\left|x-1\right| y(x)}{x}$$

il cui dominio contenga il punto $x_0 = 2$ e si dica su quale insieme sono soluzione dell'equazione differenziale.

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-|x-1|y(x)}{x} \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

Esercizio 7.14. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

utilizzando il cambio di variabile $z = \frac{y}{x}$

7.4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Esercizio 7.15. Verificare che le funzioni $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

e scrivere l'integrale generale dell'equazione.

Esercizio 7.16. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(4) = 0 \\ y'(4) = -2 \end{cases}.$$

Esercizio 7.17. Determinare, al variare del parametro reale $\alpha \neq 0$ l'insieme delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\alpha) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 7.18. Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}\,, \quad y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x\,, \quad y'' - 4y' + 4y = \sin(x) + e^{2x}\,.$$

Esercizio 7.19. Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y = x\sin(x)\,, \quad y'' + 4y = 3\cos(x) - 2x$$

Esercizio 7.20. Determinare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.21. Determinare tutte e sole le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y'' + y = \mathrm{cotan}(x)$$

8 Appendice: numeri complessi

8.1 Definizione e rappresentazione dei numeri complessi

Definisco *unit immaginaria* un simbolo i e chiamo *numero complesso* un'espressione della forma $\omega = a + ib$ dove a, $b \in \mathbb{R}$ ed i l'unità immaginaria. Dico che due numeri complessi $\omega = a + ib$ e $z = c + id$ sono uguali se $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

L'insieme dei numeri complessi si indica con la lettera $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} \equiv \left\{ z = a + ib \colon a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Se $z = a + ib$ è un numero complesso chiamo a *parte reale* di z (in simboli $a = Re(z)$) e chiamo b *parte immaginaria* di z (in simboli $b = Im(z)$). Abbiamo una corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme dei numeri complessi.

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathbb{R}^2 &\to a + ib \in \mathbb{C} \\ a + ib \in \mathbb{C} &\to (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

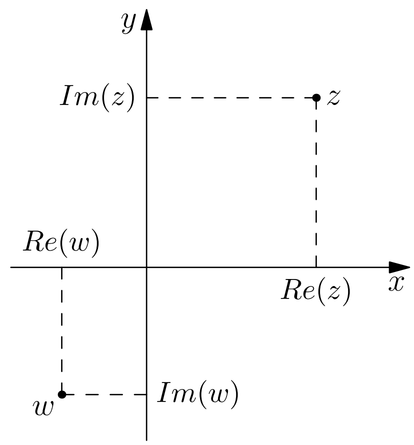

Figura 9: Rappresentazione cartesiana dei numeri complessi

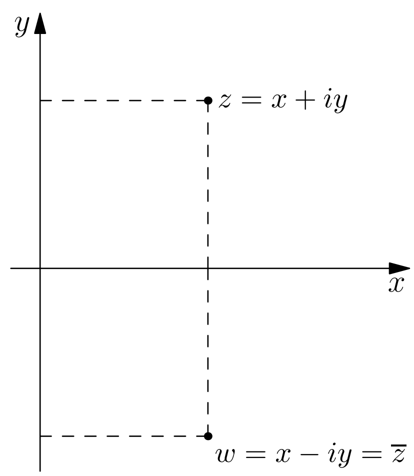

Figura 10: Un numero complesso ed il suo coniugato

Così come abbiamo fatto per le coppie ordinate di numeri reali, possiamo allora rappresentare i numeri complessi sul piano cartesiano. I punti sull'asse $x = Re(z)$ sono punti del tipo $a + i0$ quindi l'asse x si chiama *asse reale* mentre i punti sull'asse $y = Im(z)$ sono punti del tipo $0 + ib$ quindi l'asse y si chiama *asse immaginario*. Identificheremo il numero reale a con il numero complesso $a + i0$.

Se $z = a + ib$ è un numero complesso definisco *coniugato di* z e indico con il simbolo $\overline{z}$, il numero complesso $a - ib$. Sul piano complesso, $\overline{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse reale.

Esercizio 8.1. Disegnare sul piano complesso i seguenti numeri complessi e i loro coniugati: $3 + 2i$, i, 5, -20.

Introduciano un sistema di coordinate polari nel piano complesso nel seguente modo: prendo il polo O coincidente con l'origine degli assi cartesiani e l'asse polare coincidente con la semiretta positiva dell'asse reale. La distanza di $z = a + ib$ dal polo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, si chiama *modulo di* z e si indica con il simbolo $|z|$. Considero la semiretta uscente dal polo e passante per z. Essa forma un angolo con l'asse polare. Se θ è l'ampiezza di questo angolo, chiamo θ *argomento di* z e lo indico $\theta = \arg z$. Abbiamo allora che, se $z = x + iy$ si ha anche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ dove r e θ sono rispettivamente il modulo ed un argomento di z. Posso dunque scrivere $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ che viene detta *rappresentazione polare o trigonometrica di* z.

Osservazione 8.1. Se $\theta = \arg z$, $\theta + 2k\pi = \arg z$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. L'unico $\theta \in (-\pi, \pi]$ si chiama *argomento principale di* z e si indica $\arg_p z$.

Osservazione 8.2. $|z| \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$. In questo caso non è definita la semiretta uscente dal polo e passante per z e dunque non è definibile l'argomento di z.

Esercizio 8.2. Determinare modulo e argomento di $1 + i$, 2, $-1 + i\sqrt{3}$, -5, $2 - 3i$.

8.2 Aritmetica dei numeri complessi

Definizione 8.1. Siano $z = a + ib$, $w = c + id$ due numeri complessi, definisco

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

Proprietà 8.1. Valgono le seguenti proprietà:

1. L'addizione è commutativa: $z + w = w + z$;

2. L'addizione è associativa: $(z + w) + v = z + (w + v)$;

3. $0 = 0 + 0\,i$ è l'elemento neutro dell'addizione: $z + 0 = 0 + z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$;

4. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists! w \in \mathbb{C}$ tale che $z + w = w + z = 0$. Se $z = a + ib$, allora $w = (-a) + i(-b)$; w si indica col simbolo $-z$;

5. Vale la disuguaglianza triangolare: $|z + w| \leq |z| + |w|$;

6. L'addizione commuta con l'operazione di coniugio: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Definizione 8.2. Se $z, w \in \mathbb{C}$ definiamo $z - w = z + (-w)$.

Definizione 8.3. Siano $z = a + ib$, $w = c + id$ due numeri complessi, definisco

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Osservazione 8.3. Il prodotto si può calcolare con le solite regole di moltiplicazione tra binomi reali se facciamo la convenzione

$$i \cdot i = -1.$$

Infatti

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= a(c+id) + ib(c+id) = ac + i(ad+bc) + iibd \\ &= (ac-bd) + i(ad+bc)\end{aligned}$$

Esempio 8.1. $(2+i)(-1+5i) = -2+10i-i-5 = -7+9i$

Proprietà 8.2. Valgono le seguenti proprietà:

1. La moltiplicazione è commutativa: $zw = wz$;
2. La moltiplicazione è associativa: $(zw)v = z(wv)$;
3. $1 = 1+0\,i$ è l'elemento neutro della moltiplicazione: $z\,1 = 1\,z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
4. $0\,z = z\,0 = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
5. La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione: $z(v+w) = zv+zw$;
6. $z\overline{z} = |z|^2$;
7. La moltiplicazione commuta con l'operazione di coniugio: $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
8. $|zw| = |z| \cdot |w|$;
9. $\arg zw \equiv \arg z + \arg w \mod (2\pi)$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo i punti *8* e *9*. Applichiamo le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione e infine note proprietà delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}zw &= (r(\cos\theta + i\sin\theta))\,(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)] \\ &= r\rho[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]\end{aligned}$$

ovvero il modulo del prodotto zw è il prodotto dei moduli di z e w, mentre l'argomento del prodotto zw è la somma degli argomenti di z e w. □ □

Se nei punti *8* e *9* della proposizione scegliamo $w = z$ in particolare otteniamo

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

Più in generale vale la seguente

Proprietà 8.3 (Formula di De Moivre)**.** Per ogni $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\,. \tag{31}$$

Osservazione 8.4. Dalla formula (31), scegliendo $r = 1$ si ottengono le formule di moltiplicazione delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) =& Re\,(cos\theta + i\sin\theta)^n\\ \sin(n\theta) =& Im\,(cos\theta + i\sin\theta)^n\end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Calcolare $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$ e $(1+i)^3$.

Esiste il reciproco di un numero complesso? E, se esiste, è unico? È possibile definire il rapporto di due numeri complessi? Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Cerco $w \in \mathbb{C}$ tale che $zw = 1$, cioè un reciproco di z. Sia $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Per ipotesi $z \neq 0$ ovvero $r \neq 0$. Cerco $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tale che $zw = 1$.

$$zw = r(\cos\theta + i\sin\theta)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\rho(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$$

Dunque $zw = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} r\rho\cos(\theta+\varphi) = 1\\ r\rho\sin(\theta+\varphi) = 0\end{cases} \iff \begin{cases} r\rho = 1\\ \theta+\varphi = 2k\pi \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Dunque $\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{r}\\ \varphi = -\theta\end{cases}$ e quindi

$$w = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r^2}(r\cos\theta - ir\sin\theta) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Abbiamo dunque dimostrato la seguente

Proprietà 8.4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ esiste ed è unico l'inverso di z, lo indico col simbolo $\dfrac{1}{z}$ o z^{-1} ed è dato da $w = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

A questo punto possiamo definire il rapporto tra due numeri complessi

Definizione 8.4. Se z, w sono due numeri complessi, $w \neq 0$ definisco $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$ cio $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{|w|^2}$

Come per il prodotto si dimostrano facilmente le seguenti proprietà

Proprietà 8.5. Per ogni z, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ si ha

1. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
2. $\arg\dfrac{z}{w} = \arg z - \arg w \mod (2\pi)$

8.3 Radici di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$. Voglio trovare tutti e soli i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^2 = z$. Scrivo z in forma polare: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e cerco w in forma polare: $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$: applicando la formula di De Moivre (31) otteniamo $w^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$, dunque $w^2 = z$ se e solo se

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ \cos(2\theta) = \cos\varphi \\ \sin(2\theta) = \sin\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ 2\theta = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{2} \text{ oppure } \theta = \dfrac{\varphi}{2} + \pi \end{cases}$$

e dunque gli unici due numeri complessi che soddisfano l'equazione $w^2 = z$ sono

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\ w_2 &= \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) . \end{aligned}$$

In generale: se $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$ sono assegnati, cerco i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^k = z$.

Scrivo z in forma polare: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e cerco $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Per la formula di De Moivre (31) abbiamo $w^k = \rho^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$. Quindi $w^k = z$ se e solo se

$$\begin{cases} \rho^k = r \\ k\theta = \varphi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[k]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{k} + \dfrac{2n\pi}{k} \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dunque ottengo k soluzioni distinte ad esempio per $k = 0, \dots, n-1$.

Esercizio 8.4. Verificare che per $n = k$ e per $n = 0$ ottengo la stessa soluzione.

Esempio 8.2. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $w^4 = 3$.
Posso scrivere $3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Quindi

$$\begin{aligned} w^4 = 3 &\iff \rho^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 3(\cos 0 + i\sin 0) \\ &\iff \begin{cases} \rho^4 = 3 \\ 4\theta = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{3} \\ \theta = \dfrac{n\pi}{2} \quad n = 0,1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque ho le 4 radici complesse distinte:

$$\begin{array}{lll} n = 0 & \theta = 0 & w = \sqrt[4]{3}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[4]{3} \\ n = 1 & \theta = \dfrac{\pi}{2} & w = \sqrt[4]{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = i\sqrt[4]{3} \\ n = 2 & \theta = \pi & w = \sqrt[4]{3}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[4]{3} \\ n = 3 & \theta = \dfrac{3\pi}{2} & w = \sqrt[4]{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt[4]{3} \end{array}$$

Esempio 8.3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $w^2 = 1 + i$.
Calcolo il modulo e l'argomento di $1 + i$:

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Posso scrivere $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Quindi

$$\begin{aligned} w^2 = 1+i &\iff \rho^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{8} + n\pi \quad n = 0, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo le 4 soluzioni complesse distinte:

$$\begin{array}{lll} n = 0 & \theta = \dfrac{\pi}{8} & w = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right) \\ n = 1 & \theta = \dfrac{9\pi}{8} & w = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i\sin\dfrac{9\pi}{8}\right) \end{array}$$

In generale vale il

Teorema 8.1 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Sia $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$ un polinomio a coefficenti complessi di grado n (cio $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 0, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$); esso ammette esattamente n radici nel campo complesso (se contate con la loro molteplcità).*

Considero un polinomio di secondo grado nel campo complesso: $P_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, con a_0, a_1 $a_2 \in \mathbb{C}$, $a_2 \neq 0$, come posso trovarne le radici in $\mathbb{C}$? So che ne esistono esattamente due. Vediamolo su un esempio.

Esempio 8.4. $P_2(z) = z^2 - 2iz - 1 - i = 0$. Ne calcolo il discriminante come per un polinomio di secondo grado a coefficienti reali:

$$\frac{\Delta}{4} = (-i)^2 - 1(-1-i) = -1 + 1 + i = i.$$

Cerco i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^2 = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $w = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. Dunque

$$w^2 = i \iff \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, 1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} n&=0 \qquad \theta=\frac{\pi}{4} \qquad w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\\ n&=1 \qquad \theta=\frac{5\pi}{4} \qquad w_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

e dunque

$$z_0=\frac{i+w_0}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad z_1=\frac{i+w_1}{1}=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Considero un polinomio di secondo grado a coefficienti reali. Si può dimostrare la seguente:

Proprietà 8.6. Sia $P_2(z)$ un polinomio di secondo grado a coeffiecienti reali e con discriminante Δ negativo. Allora le radici complesse di P_2 sono due numeri complessi coniugati.

Vediamo come trovare queste due radici.

$$P_2(z)=a_2z^2+a_1z+a_0\,, \quad a_i\in\mathbb{R}\,, \quad \forall i=0,1,2\,, \quad a_2\neq 0.$$

Calcolo il discriminante: $\Delta=(a_1)^2-4a_0a_2$. Se $\Delta<0$, comunque esistono w_0, $w_1\in\mathbb{C}$ tali che $w_0^2=w_1^2=\Delta$. Li possiamo trovare facilmente: $\Delta=(a_1)^2-4a_0a_2=\left(4a_0a_2-(a_1)^2\right)(\cos\pi+i\sin\pi)$. Dunque

$$\begin{aligned} w_0&=i\sqrt{-\Delta} \qquad z_0=\frac{-a_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_0}\\ w_1&=-i\sqrt{-\Delta} \qquad z_1=\frac{-a_1-i\sqrt{-\Delta}}{2a_0}\end{aligned}$$

8.4 Notazione esponenziale

Sia $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\in\mathbb{C}$. Introduco una notazione più compatta: scrivo $z=re^{i\varphi}$. Abbiamo visto che se $n\in\mathbb{N}$ allora $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, ovvero, nella nuova notazione $z^n=r^ne^{in\varphi}$, cioè formalmente possiamo usare le stesse regole di calcolo che usiamo per le esponenziali reali, quindi usiamo questa nuova notazione che è più compatta.

8.5 Rotazione di vettori nel piano

Consideriamo un vettore del piano (x,y). Se lo ruoto di un angolo φ che vettore ottengo? Passo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

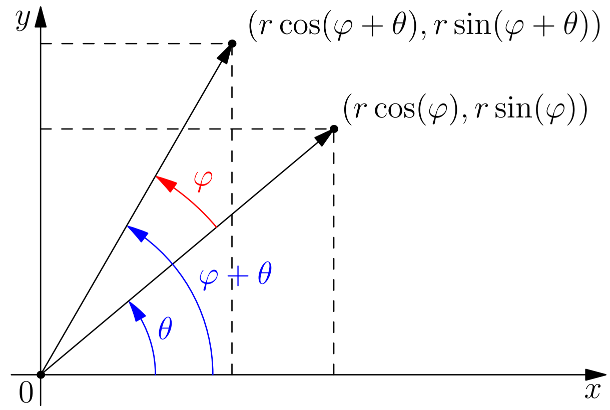

Figura 11: Rotazioni nel piano

Dopo la rotazione ottengo il punto (x_φ, y_φ) di coordinate

$$\begin{cases} x_\varphi = r\cos(\theta+\varphi) \\ y_\varphi = r\sin(\theta+\varphi) \end{cases}$$

cio $x_\varphi + iy_\varphi = re^{i(\theta+\varphi)} = re^{i\theta}e^{i\varphi} = (x+iy)e^{i\varphi}$