Prova scritta, primo appello, sessione estiva

Corso di Laurea in Ingegneria dell'ambiente e del territorio, A.A. 1998–1999
Prof. Vespri

21 giugno 1999

1. Sia data la funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
Dimostrare che è crescente e concava. Trovare l'immagine di f e provare che
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} \quad \forall x > 0$$

2. Determinare i polinomi $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tali che
$$\int_1^{+\infty} \left[\sqrt{P_n(x)} - (x^2 - 1)\right] dx < +\infty$$

3. Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$(z+1)^2 = i(\overline{z}+1)^2$$
e rappresentarli sul piano Oxy.

4. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 - 3x} - \sqrt{1+x}}{(x-3)(2+\sin x)}$$

5. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2 + \sqrt{n}}\right)$$