Prova scritta, primo appello, sessione invernale

Corso di Laurea in Ingegneria dell'ambiente e del territorio, A.A. 1998–1999
Prof. Vespri

28 gennaio 1999

1. Si descriva il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$ della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
ove a_n è la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 15a_n + \dfrac{1}{22a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan^3(x)\ \cos(x)^{\frac{1}{\sin(x)-x}}}{(2\tan(x) - \sin(2x))^2}$$

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\,|x|^\alpha}{y^4 + x^2}$$

4. Si consideri la funzione
$$F(x) = \int_0^x \log|\cos t|\, dt$$
   (a) Si tracci il grafico approssimato di F per $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
   (b) Si provi che F è prolungabile con continuità a tutto $\mathbb{R}$;
   (c) Si provi che la funzione F così prolungata è dispari, iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}$.
   (d) Si verifichi che
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$$
   e se ne deduca l'uguaglianza
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}\log 2\,.$$

5. Integrare la seguente equazione differenziale
$$y' = 2x^3 y - \frac{\mathrm{e}^{x^4}}{y}\,.$$