V. Funzioni olomorfe

1 Funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$: derivazione reale e complessa

1.1 Funzioni di variabile complessa

Numeri complessi
Ricordiamo che si puo' identificare l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, associando ad ogni $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'identificazione cosi definita rispetta le strutture di spazio vettoriale in $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$. La struttura di prodotto di numeri complessi da' inoltre un modo semplice di descrivere le rotazioni orientate del piano $\mathbb{R}^2$. Infatti se $z = a + ib, w = c + id$ sono due numeri complessi, allora

$$z\overline{w} = (a + ib)(c - id) = (ac + bd) + i(bc - ad) = (z|w)_{\mathbb{R}^2} + i \det(w, z) \tag{1.1}$$

e dunque, se θ è l'angolo formato dai vettori $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ e *misurato da w a z*,

$$w\overline{z} = |z||w|(\cos\theta + i \sin\theta),$$

In particolare si ritrova che iz, la moltiplicazione di $z = a + ib$ per i, corrisponde al vettore ottenuto ruotando di $\pi/2$ in senso antiorario il vettore z: infatti $iz\overline{z} = i|z|^2 = |z|^2(0 + i1)$.

Usando l'identificazione tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ appena descritta, ogni funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è anche una funzione, che notiamo ancora con f, da $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2$: se si pone

$$z = x + iy, \qquad u(x, y) := \Re f(z),\ v(x, y) := \Im f(z),$$

si ha

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Supponiamo ora $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A aperto e sia f differenziabile nel senso reale in $z = x + iy$. Scriviamo $f = u + iv$ e indichiamo rispettivamente con f_x e f_y la prima e la seconda colonna della matrice jacobiana di f

$$\mathbf{D}f(z) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

$f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ sono rispettivamente i vettori velocità delle curve $t \to f(t, y)$ in x e $t \to f(x, t)$ in y.

Conviene introdurre le derivate nelle variabili z e $\overline{z}$ di f come combinazioni lineari

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z := \frac{1}{2}(f_x - i f_y), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_{\overline{z}} := \frac{1}{2}(f_x + i f_y),$$

o anche

$$f_x = f_z + f_{\overline{z}}, \qquad f_y, f_y = i(f_z - f_{\overline{z}}).$$

In termini di differenziali le formule precedenti si scrivono come

$$\begin{aligned} &dz = dx + i\,dy, && d\overline{z} = dx - i\,dy, \\ &dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}), && dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}), \\ &df = f_x\,dx + f_y\,dy = f_z\,dz + f_{\overline{z}}\,d\overline{z}. \end{aligned}$$

1.1 ¶ Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}62 \to \mathbb{C}$ differenziabile. Mostrare che

$$(w|z)_{\mathbb{R}^2} = -2i\Im(f_z \overline{f_{\overline{z}}}), \qquad \det \mathbf{D} f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

[*Sugg.* Dalla (1.1) segue che

$$(f_x|f_y)_{\mathbb{R}^2} + i \det Df = f_y \overline{f_x}].$$

Derivata complessa

Ricordiamo, cfr. Vol. III, Cap. 7, che in analogia con la derivata delle funzioni di una variabile si pone

1.2 Definizione. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω aperto, $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è* derivabile in senso complesso in z_0 *con derivata $f'(z_0)$ se esiste finito (in $\mathbb{C}$)*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

$f'(z_0)$ è detta la derivata complessa *di f in z_0. Se f ha derivata complessa in ogni punto di Ω, si dice che f è* olomorfa in Ω. *La classe delle funzioni olomorfe su Ω si denota con $\Theta(\Omega)$.*

Osserviamo che la derivabilità complessa in z_0 è equivalente alla *differenziabilità complessa*

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)\,w + o(|w|) \qquad \text{per } w \to 0. \tag{1.2}$$

Invece la differenziabilità (reale) della funzione $f(x + iy) = (u(x, y), v(x, y))$ equivale a

$$\begin{cases} u(x_0 + x, y_0 + y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\,x + u_y(x_0, y_0)\,y + o(|w|) \\ v(x_0 + x, y_0 + y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)\,x + v_y(x_0, y_0)\,y + o(|w|) \end{cases}$$

per $w = x + iy \to 0$, che possiamo riscrivere, moltiplicando la seconda relazione per i e sommandola alla prima, come

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f_x(z_0)x + f_y(z_0)y + o(|w|) \qquad \text{per } w \to 0. \tag{1.3}$$

Confrontando le (1.2) (1.3) si ottiene subito

1.3 PROPOSIZIONE. $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è olomorfa in* Ω *se e solo se* f *è differenziabile in* Ω *e vale la relazione*

$$f_y(z_0) = i f_x(z_0) \qquad \textit{equivalentemente} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0. \tag{1.4}$$

In questo caso $f'(z_0) = f_x(z_0) = f_z(z_0)$.

A parole la (1.4) esprime il fatto che il vettore f_y si ottiene ruotando di $\pi/2$ in senso antiorario il vettore f_x. La (1.4) si puo' riscrivere come

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \qquad \forall z \in \Omega, \tag{1.5}$$

oppure come un sistema lineare di equazioni allle derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \qquad \forall z = x + iy \in \Omega \tag{1.6}$$

nelle componenti di f, $f(x+iy) =: u(x,y)+iv(x,y)$. Il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (1.4), (1.5) o (1.6) prende il nome di *equazioni di Cauchy-Riemann.*

1.4 OSSERVAZIONE. Se f ha derivata complessa in z_0, il suo differenziale (reale) agisce come una moltiplicazione complessa

$$\frac{\partial f}{\partial w}(z_0) = df(z_0)(w) = f'(z_0)w.$$

E' una condizione particolarmente stringente. Infatti vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ vengono mappati nei vettori $f'(z_0)w_1, f'(z_0)w_2$, i.e. in vettori ruotati dello stesso angolo e amplificati allo stesso modo di $|f'(z_0)|$. In particolare vettori w_1 w_2 perpendicolari e di lunghezza uguale hanno immagini $f'(z_0)w_1$ e $f'(z_0)w_2$ perpendicolari e di lunghezza uguale. Se poi $w_2 = iw_1$, i.e., w_2 è il ruotato di w_1 di $\pi/2$ in senso antiorario, allora banalmente $f'(z_0)w_2 = if'(z_0)w_1$, i.e., l'immagine di w_2 è il ruotato di $\pi/2$ in senso antiorario dell'immagine di w_1: si dice che *il differenziale complesso* $z \to f'(z_0)z$ *conserva l'orientazione.* In particolare se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è olomorfa, i campi $f_x, f_y : \Omega \to \mathbb{C}$ sono in ogni punto perpendicolari, hanno $|f_x| = |f_y|$ e $\det Df \geq 0$.

1.5 ¶ Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentiabile in senso reale in z_0. Allora $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso in z_0 se e solo se

$$|f_x| = |f_y|, \qquad f_x \bullet f_y = 0, \qquad \det \mathbf{D}f \geq 0. \tag{1.7}$$

1.6 ¶ Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso allora

$$|f'(z_0)|^2 = \det \mathbf{D}f(z_0).$$

1.7 ¶ Sia $\ell : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare e A la matrice associata. Mostrare ℓ è $\mathbb{C}$-lineare, $\ell(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, se e solo se

$$AJ = JA$$

essendo J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ associata alla torazione di $\pi/2$ in senso antiorario.

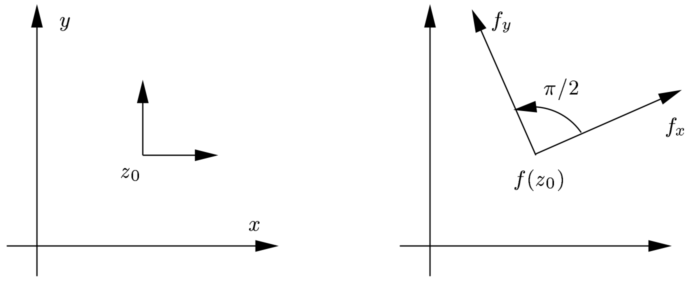

Figura 1.1. Una trasformazione $\mathbb{C}$-lineare.

1.8 ¶ Mostrare che, come nel caso delle funzioni di una variabile reale,

(i) Se f ha derivata complessa in z_0, allora f è continua in z_0,

(ii) Se f, g hanno derivata complessa in z_0, allora $f+g$, fg hanno derivata complessa in z_0 e

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \qquad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

In particolare $\Theta(\Omega)$ è un anello su $\mathbb{C}$.

(iii) Se f, g hanno derivata complessa e $g(z_0) \neq 0$, allora f/g ha derivata complessa in z_0 e

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(iv) Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, A un aperto in $\mathbb{C}$ con $f(z_0) \in A$ e $g : A \to \mathbb{C}$. Se f ha derivata complessa in z_0 e g ha derivata complessa in $f(z_0)$, allora $g \circ f$ ha derivata complessa in z_0 e $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

(v) se f ha derivata complessa in Ω, e $\gamma : [0,1] \to \Omega$ è di classe C^1, allora $t \to F(\gamma(t))$ è derivabile e

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

1.9 ¶ Siano Ω, Δ aperti, $f \in \Theta(\Omega)$ e $g \in \Theta(\Delta)$, con $f = g$ in $\Omega \cap \Delta$. Allora

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega, \\ g(z) & \text{se } z \in \Delta \end{cases}$$

è olomorfa in $\Omega \cup \Delta$.

1.10 ¶ Mostrare che

(i) I polinomi in $z \in \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$.

(ii) Le funzioni razionali, i.e. i quozienti $P(z)/Q(z)$ di polinomi sono funzioni olomorfe in $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) \neq 0\}$.

1.2 Il teorema fondamentale del calcolo

Integrale di linea

Sia Ω aperto in $\mathbb{C}$. Un *differenziale olomorfo* in Ω è una applicazione $\Omega \to \mathbb{C}^*$, dove $\mathbb{C}^*$ è il duale (complesso) di $\mathbb{C}$. Poiche' $\mathbb{C}^*$ ha dimensione uno e un generatore (su $\mathbb{C}$) è dato dal differenziale complesso $dz = dx + i dy$, ogni differenziale olomorfo si scrive come

$$\omega(z) = f(z)dz$$

dove $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Se ora $\gamma : [0,1] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti in Ω, e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è continua, l'*integrale di $f(z)\,dz$ lungo la curva γ* è definito da

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

1.11 Osservazione. Decomponendo in parte reale e immaginaria $f = u + iv$, e $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, si ha

$$\omega = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy). \tag{1.8}$$

i.e., le parti reale e immaginaria di un differenziale olomorfo sono forme differenziali reali in Ω, e le componenti (v, u) della parte immaginaria si ottengono ruotando le componenti $(u, -v)$ della parte reale in senso antiorario di $\pi/2$. Inoltre

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz :&= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (ux' - vy')\,dt + i\int_0^1 (uy' + vx')\,dt\\ &= \int_0^1 u\,dx - v\,dy) + i\int_0^1 (u\,dy + v\,dx = \int_\gamma \Re(f(z)\,dz) + i\int_\gamma \Im(f(z)\,dz).\end{aligned}$$

Differenziali esatti e primitive

Sia $\Omega \subset \Omega$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Una *primitiva olomorfa di f in Ω* è una funzione olomorfa $F \in \Theta(\Omega)$ tale che $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$.

Un *potenziale per il differenziale olomorfo $f(z)\,dz$ in Ω* è una funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F = \alpha + i\beta$, di classe $C^1(\Omega)$ tale che α e β sono rispettivamente potenziali per le forme $\Re(f(z)\,dz)$ e $\Im(f(z)\,dz)$. Quando $\omega := f(z)\,dz$ ha un potenziale in Ω, si dice che *ω è esatta in Ω.*

Scrivendo $f =: u+iv$, in modo che $f(z)\,dz = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx - u\,dy)$, $F = \alpha + i\beta$ è per definizione un potenziale se e solo se $F \in C^1(\Omega)$ e

$$\begin{cases}\alpha_x = u,\\ \alpha_y = -v,\end{cases} \qquad \begin{cases}\beta_x = v,\\ \beta_y = u.\end{cases}$$

in Ω, o, in termini complessi se e solo se

$$\begin{cases}F_x = \alpha_x + i\beta_x = u + iv = f,\\ F_y = \alpha_y + i\beta_y = -v + iu = if.\end{cases}$$

Le equazioni precedenti sono appunto le equazioni di Cauchy-Riemann e quindi dalla Proposizione 1.3 segue

1.12 Proposizione. *Sia $f(z)\,dz$ un differenziale olomorfo in Ω. $F : \Omega \to \mathbb{C}$ è un potenziale per $f(z)\,dz$ in Ω se e solo se F è una primitiva olomorfa di f in Ω.*

Possiamo dunque utilizzare la teoria delle forme differenziali esatte per dicutere l'esistenza di primitive olomorfe. In questo contesto il theoremreflav.th1 Capitolo II si rilegge come *una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua ha una primitiva olomorfa in Ω se e solo se*

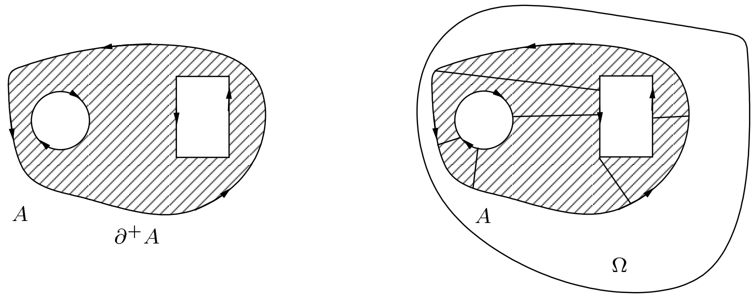

Figura 1.2. (a) Un dominio $A \subset \mathbb{C}$. (b) A è un dominio ammissibile in Ω.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

per ogni curva C^1 a tratti e chiusa $\gamma : [0,1] \to \Omega$.

Tuttavia per domini semplici — qui lo enunciamo per un rettangolo R con i lati paralleli agli assi — una condizione sufficiente, a priori piu' debole, è che *il lavoro sul bordo di tutti i rettangoli R' contenuti in R e con i lati paralleli agli assi sia nullo.* Conviene innanzitutto introdurre le seguenti definizioni.

Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$. Diciamo che A è un *dominio* se A è una aperto connesso la cui frontiera è l'immagine di un numero finito di curve chiuse C^1 a tratti. In particolare per tutti i punti x del bordo ∂A tranne al piu' un numero finito, è definita la normale esterna ad A in x; indicheremo quindi con $\partial^+ A$ una curva C^1 a tratti che percorre il bordo di A in senso antiorario, i.e., lasciando alla sua destra la normale esterna ad A. La curva $\partial^+ A$, pur non essendo univocamente definita, si chiama con un qualche abuso di linguaggio la *frontiera orientata, in senso antioriario,* di A.

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Un dominio A si dice *ammissibile per* Ω se $A \subset \Omega$ ed è possibile trovare un numero finito di domini A_i e di rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati R_i strettamente contenuti in Ω tali A è unione disgiunta $A = \cup_{i=1}^N A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, e $\overline{A_i} \subset \overline{R_i}$. Esempi di domini ammissibili sono ad esempio i domini piccoli, le palle $B(z,r) \subset \Omega$, le corone $A(z,r,R) := \{w \in \mathbb{C} \,|\, r < |w-z| < R\}$ contenute in Ω e le intersezioni di palle, ad esempio gli insiemi del tipo $A := B(z_0,r) \setminus \overline{B(z,\delta)}$ con $B(z,\delta) \subset B(z_0,r)$.

1.13 Osservazione. Non è il caso di discutere la definizione di insieme ammissibile, sia perche' avremo a che fare solo con domini in Ω ammissibili per Ω, sia perche' è essenzialmete una definizione di comodo. Con una teoria dell'integrazione piu' sofisticata, si puo' estendere la nozione di dominio in modo da comprendere aperti la cui frontiera è l'immagine di una unione numerabile di curve C^1 a tratti di lunghezza totale finita. Con questa nuova definizione di dominio, tutti i domini di Ω sono ammssibili per Ω.

1.14 Proposizione (fondamentale del calcolo, I). *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua definita su $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Sono fatti equivalenti*

(i) *per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, si ha $\int_{\partial^+ R} f(z)\,dz = 0$.*

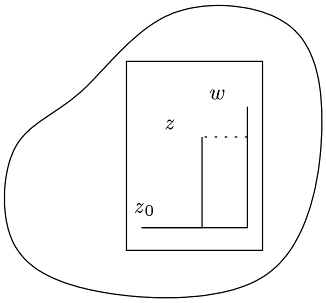

Figura 1.3.

(ii) *per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, e per ogni $z_0 \in R$ la funzione*

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in R,$$

dove $\gamma_z : [0,1] \to R$ è la spezzata che congiunge $z_0 = x_0 + iy_0$ con $x + iy_0$ e quindi $x + iy_0$ con $z = x + iy$, è una una primitiva olomorfa di f in R,

(iii) *per ogni dominio ammissibile A per Ω si ha*

$$\int_{\partial^+ A} f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Mostriamo che $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in R$. Sia $w \neq 0$ tale che $z + w \in R$. Dalla (i) segue che

$$F(z+w) - F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

essendo γ la spezzata che congiunge z con $z + w$ muovendo prima i orizzontale e quindi in verticale. Si noti che la lunghezza di γ è $\sqrt{2}\,|w|$ e che l'immagine di γ è contenuta in $\overline{B(z, |w|)}$. Essendo

$$\int_\gamma d\zeta = w$$

si ha

$$\Big|F(z+w) - F(z) - wf(z)\Big| = \Big|\int_\gamma (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta\Big| \le \sup_{\overline{B(z,|w|)}} \Big|f(\zeta) - f(z)\Big|\, \sqrt{2}\,|w|$$

e quindi

$$\left|\frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z)\right| \le \sup_{\overline{B(z,|w|)}} |f(\zeta) - f(z)|$$

Essendo f continua in z, per $w \to 0$, si ottiene che F ha derivata complessa $f(z)$ in z.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia R un rettangolo con i lati paralleli agli assi contenuto in Ω e sia F una primitiva olomorfa di f in R. Si ha

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) \tag{1.9}$$

per ogni curva $\gamma : [0,1] \to R$ di clase C^1, cfr. Esercizio 1.8. Se ora γ una curva di classe C^1 a tratti in R, si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)),$$

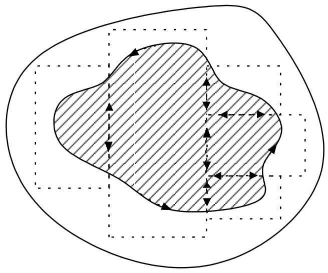

Figura 1.4.

in particolare

$$\int_{\partial^+ A} f(z)\,dz = 0$$

per ogni dominio $A \subset R$. Se ora $A = \cup_{i=1}^N A_i$ con A_i domini disgiunti contenuti ciascuno in un rettangolo $R_i \subset \Omega$, si osserva che gli archi di curva in comune a piu' di un A_i sono percorsi esattamente due volte con orientazione opposta. Percio' gli integrali sui tratti in comune si elidono e quindi

$$\int_{\partial^+ A} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ A_i} f(z)\,dz = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ovvio. □

Si ha inoltre

1.15 Teorema (fondamentale del calcolo, II). *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Allora $F : \Omega \to \mathbb{C}$ è una primitiva olomorfa per f se e solo per ogni curva C^1 a tratti $\gamma : [0,1] \to \Omega$ si ha*

$$F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \int_\gamma f(z)\,dz. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Vista la corrispondenza tra primitive olomorfe e potenziali, il teorema segue dalla esattezza di $f(z)\,dz$. Diamo qui una dimostrazione diretta. Se F è una prinitiva olomorfa di f, si ha in ogni punto in cui γ è derivabile,

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\gamma'(t);$$

e integrando si ottiene

$$F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Viceversa, se vale la (1.10), si ha $\int_{\partial^+ R} f(z)\,dz = 0$ per ogni rettangolo contenuto in Ω. Dalla Proposizione 1.14 segue l'esistenza di una funzione G olomorfa con $G' = f$ in una palla $B(z,r) \subset \Omega$. Dunque per ogni $w \in B(z,r)$ e ogni curva $\gamma : [0,1] \to B(z,r)$ con $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$, si ha

$$G(w) - G(z) = \int_\gamma f(z)\,dz = F(w) - F(z).$$

$F(w) - G(w)$ è dunque costante in $B(z,r)$ e quindi $F' = G'(z) = f$ in $B(z,r)$, in particolare $F'(z) = G'(z) = f(z)$. □

1.3 Serie di potenze complesse

Siano a_n una successione di numeri complessi e sia

$$\frac{1}{\rho} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ricordiamo che se $\rho > 0$, la serie di potenze centrata in z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge assolutamente in ogni punto z all'interno del cerchio di convergenza $B(z_0, \rho) := \{z \,|\, |z - z_0| < \rho\}$, che la serie non converge in $\{z \,|\, |z - z_0| > \rho\}$ (se $\rho < \infty$), e che la convergenza della serie é uniforme in ogni compatto contenuto all'interno del cerchio di convergenza, in particolare su ogni cerchio $B(z_0, r)$ con $r < \rho$. Segue che la somma della serie

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

è continua all'interno del cerchio di convergenza $B(z_0, \rho)$. Si ha

1.16 Teorema. *Sia $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z \in B(z_0, r)$, $r > 0$, la somma di una serie di potenze. Allora S è di classe $C^\infty(B(z_0, r))$ ed ha derivate complesse $S^{(k)}(z)$ di ogni ordine in $B(z_0, r)$. Per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$, $S^{(k)}(z)$ è la somma della serie di potenze,*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n (z - z_0)^{n-k} \qquad \forall z \in B(z_0, \rho).$$

In particolare

$$S^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \qquad \forall k \ge 0.$$

Il teorema si ottiene applicando induttivamente la Proposizione 1.17 seguente

1.17 Proposizione. *Sia $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z \in B(z_0, r)$, $r > 0$, la somma di una serie di potenze. Allora S è $C^1(B(z_0, r))$, olomorfa in $B(z_0, r)$ e*

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (z - z_0)^{k-1} \qquad \forall z \in B(z_0, r).$$

Dimostrazione. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, (z - z_0)^{k-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Sia $T(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, (z - z_0)^{k-1}$ la somma. Per ogni $z, w \in B(z_0, r)$, sia $\gamma : [0, 1] \to B(z_0, r)$ una curva regolare con $\gamma(0) = w$ e $\gamma(1) = z$, Poiche' per ogni intero $k \ge 1$, la derivata complessa di $(z - z_0)^k$ è $k(z - z_0)^{k-1}$, dal teorema fondamentale del calcolo, Teorema 1.15,, segue

$$\sum_{k=1}^{p} a_k (z - z_0)^k - \sum_{k=1}^{p} a_k (w - z_0)^k = \int_\gamma \sum_{k=1}^{p} k\, a_k (\zeta - z_0)^{k-1}\, d\zeta$$

Poiche' le somme parziali delle serie di potenze convergono uniformemente sui compatti strettamente contenuti nel cerchio di coonvergenza, passando al limite per $p \to \infty$ si ricava che

$$\sum_{k=1}^{p} a_k(z - z_0)^k \longrightarrow S(z) - a_0,$$
$$\sum_{k=1}^{p} a_k(w - z_0)^k \longrightarrow S(w) - a_0,$$
$$\int_\gamma \sum_{k=1}^{p} k\, a_k(\zeta - z_0)^{k-1}\, d\zeta \longrightarrow \int_\gamma T(\zeta)\, d\zeta,$$

e quindi

$$S(z) - S(w) = \int_\gamma T(\zeta)\, d\zeta.$$

Essendo z, w e γ arbitrari, segue dal teorema fondamentale del calcolo, Teorema 1.15, che S è derivabile in senso complesso e $S'(z) = T(z)$ $\forall z \in B(z_0, r)$. □

1.4 Qualche funzione di variabile complessa

1.18 (La funzione z^2) È una funzione olomorfa $z^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $D(z^2) = 2z$. In coordinate reali

$$\text{se } z = x + iy \qquad \text{allora } z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

e in coordinate polari,

$$\text{se } z = re^{i\theta} \qquad \text{allora } z^2 = r^2 e^{2i\theta},$$

Si vede subito che la trasformazione $z \to z^2$

(i) manda rette per l'origine in semirette per l'origine.
(ii) manda cerchi con centro l'origine in cerchi di centro l'origine,
(iii) manda le iperboli $x_2 - y^2 = k$ in rette verticali,
(iv) manda le iperboli $2xy = k$ in rette orizzontali.

1.19 (La funzione esponenziale) L'esponenziale complesso e^z è definito come

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

L'esponenziale complesso è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, perche'

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z, \qquad \frac{\partial e^z}{\partial y} = ie^z.$$

Si vede subito che la trasformazione $z \to e^z$

(i) manda rette orizzontali in semirette per l'origine,
(ii) manda rette verticali in cerchi per l'origine,
(iii) se $z = x + iy$ si ha $|e^z| \le e^x$, in particolare e^z è limitata su gni semipiano $\{z = x + iy \,|\, x < x_0\}$,
(iv) $e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$,
(v) e^z non è iniettiva. Infatti $e^z = e^w$ se e solo se z e w hanno parti reali uguali e parti immaginarie che differiscono di un multiplo intero di 2π,

$$e^z = e^w \qquad \text{se e solo se} \qquad z - w = 2\pi ik,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Si dice che e^z *è periodica di periodo* $2\pi i$.

Infine, come abbiamo visto nel Vol. II, l'esponenziale complesso è la somma di una serie di potenze convergente in tutto $\mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

1.20 (Seno e coseno, seno e coseno iperbolico) Si definiscono le funzioni $\sin z$ e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$, e le funzioni iperboliche $\sinh z$, $\cosh z$, $z \in \mathbb{C}$ con le *formule di Eulero*

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Sono dunque tutte funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$, e

$$D(\sin z) = \cos z, \qquad D(\sin z) = -\cos z,$$
$$D(\sinh z) = \cosh z, \qquad D(\sinh z) = \cosh z.$$

La funzione $\cos z$ si annulla nei soli punti dell'asse reale $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e la funzione $\sin z$ si annulla nei soli punti dell'asse reale $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si noti esplicitamente che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ *non* sono limitate. Dalla definizione se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \le |\cos(z)| = \frac{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}|}{2} \le \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y$$

e analogamente

$$\frac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \le |\sin(z)| = \frac{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|}{2} \le \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y.$$

Le funzioni $\cosh z$ e $\sinh z$ sono ottenute dal coseno e dal seno con una rotazione di $\pi/2$,

$$\cosh z = \cos(iz), \qquad \sinh z = -i\sin(iz),$$

in particolare la funzione $\cosh hz$ si annulla nei punti $z = i(\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, sull'asse immaginario e la funzione $\sinh hz$ si annulla nei punti $z = ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sempre sull'asse immaginario.

Infine le funzioni trigonometriche sono anche la somma delle rispettive serie di potenze centrate in zero, convergenti su tutto $\mathbb{C}$. cfr. Vol. II,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

1.21 ¶ Provare che

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \qquad \cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \sin z_2 + \cos z_2 \sin z_1, \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$
$$\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sin z,$$
$$e^z = \cosh z + \sinh z, \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \qquad \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y.$$

1.22 (Tangente e cotangente, tangente e cotangente iperboliche) La funzione $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ è dunque ben definita e olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z = \pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Si noti anche che $\tan z$ è limitata e lontana da zero lontano dall'asse reale. Infatti se $z = x + iy$, si ha

$$|\tan z| = \frac{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|}{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}|} \le \frac{e^{-y} + e^{y}}{e^{y} - e^{-y}} = \coth y,$$

da cui $|\tan z| \le \coth y_0$ su $A := \{z \,|\, |\mathrm{Im}\,(z)| \ge y_0\}$. Analogamente

$$|\cot z| = \frac{1}{|\tan z|} = \frac{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}|}{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|} \le \frac{e^{-y} + e^{y}}{e^{y} - e^{-y}} = \coth y.$$

1.23 ¶ Il lettore calcoli le derivate delle funzioni tangente, cotangente, tangente iperbolica, cotangente iperbolica, e provi alcune identita'.

1.24 Teorema (Inversa locale di una funzione olomorfa). *Sia* $f \in \Theta(\Omega)$ *e* $z_0 \in \Omega$. *Se* $f'(z_0) \neq 0$,

(i) *esiste un intorno* U_{z_0} *di* z_0 *tale che* $f : U_{z_0} \to \mathbb{C}$ *è aperta e invertibile.*

(ii) *Se* $g := \left(f_{|U_{z_0}}\right)^{-1}$ *è l'inversa di* $f_{|U_{z_0}}$, *allora* g *è olomorfa in* $f(U_{z_0})$ *e*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \qquad \forall w \in f(U_{z_0}).$$

Come osservato piu' volte, cfr. Cap 4, se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^1, la condizione $\det \mathbf{D}f(z) \neq 0$ in ogni punto di Ω non è piu' sufficiente a garantire l'esistena di una inversa globale, contrariamente al caso unidimensionale. La funzione periodica $f(z) = e^z$ ne è un esempio.

Dimostrazione. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e indichiamo con f la stessa funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Essendo f olomorfa,

$$\mathbf{D}f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

se $f_x := a + ib$. Percio'

$$|f'(z)|^2 = |f_x(z)|^2 = a^2 + b^2 = \det \mathbf{D}f(z).$$

Segue allora dal teorema di invertibilità che esiste U_{z_0} tale che $f_{!U_{z_0}}$ è aperta, inveritibile con inversa $g : f(U_{z_0}) \to \mathbb{C}$ di classe $C^1(f(U_{z_0}))$. Se ora

$$\mathbf{D}g(w) := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}f(g(w)) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $f'(g(w)) =: a + ib$, da $\mathbf{D}g(w)\mathbf{D}f(g(w)) = \mathrm{Id}$, si ricava subito che

$$\alpha = \delta = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \beta = -\gamma = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

i.e., la matrice $\mathbf{D}g(w)$ ha colonne perpendicolari, della stessa lunghezza, e determninante positivo. $\mathbf{D}g$ è dunque olomorfa in $f(U_{z_0})$ e

$$g'(w) = \alpha + i\beta = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

□

Logaritmo complesso

La funzione olomorfa $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ è $2\pi i$ periodica. In particolare per ogni $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ vi sono infiniti punti z tali che $e^z = w$. Si usa dire *la funzione inversa di* e^z *, il* logaritmo complesso*, è una funzione multivoca.*

Se ne puo' dare la seguente descrizione. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la restrizione di e^z all'insieme

$$S_k = \{z = x + iy, \mid 2\pi k \leq y < 2\pi(k+1)\}$$

è bigettiva su $\mathbb{C} \setminus 0$ e $\cup_k S_k = \mathbb{C}$. In particolare l'esponenziale complesso e^z ha una inversa, $\log^{(k)}(z) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S_k$ detta un *foglio del logaritmo*. La determinazione con $k = 0$, denotata semplicemente con

$$\log z := \log^{(0)} z$$

si chiama la *determinazione principale* del logaritmo. Per definizione per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$e^{\log^{(k)} z} = z = e^{\log z}$$

e quindi

$$\log^{(k)} z = \log z + 2\pi i k \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{1.11}$$

Dal teorema di invertibilià locale segue

$$D(\log^{(k)} z) = \frac{1}{e^{\log^{(k)} z}} = \frac{1}{z}.$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \,|\, x > 0,\, y = 0\}$, (immagine dell'aperto $\{z = x + iy \,|\, 2\pi k < y < 2\pi(k+1)\}$).

1.25 Osservazione (Logaritmo e argomento). La difficoltà nell'invertire l'esponenziale complesso è la stessa difficoltà che si incontra nell'invertire il moto circolare uniforme $t \to e^{it}$ da $\mathbb{R}$ su S^1. Ricordiamo che per $z \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$, si chiama *argomento* $\arg^{(k)}(z)$ di z l'unico numero reale t *compreso in* $[2\pi k, 2\pi(k+1)[$ tale che $e^{it} = z$. Se ora $z = x + iy$, $2\pi k \le y < 2\pi(k+1)$, e $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora

$$\begin{cases} w = e^x e^{iy}, \\ 2\pi k \le y < 2\pi(k+1) \end{cases} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} e^x = |w|, \\ e^{iy} = \frac{w}{|w|} \\ 2\pi k \le y < 2\pi(k+1) \end{cases}$$

da cui l'espressione del *logaritmo in coordinate polari*

$$\log^{(k)}(w) = x + iy = \log|w| + 2\pi i \arg^{(k)}\Big(\frac{w}{|w|}\Big). \tag{1.12}$$

L'approccio seguito, cioe' lo spezzare la funzione multivoca argomento o il logaritmo complesso in una successione di fogli non è senza problemi. *Si perde infatti la continuità dei fogli lungo la semiretta positiva delle x.* Se infatti $z = x + iy$, $x > 0$, si ha dalla (1.12)

$$\log z \to \log x \qquad \text{per } y \to 0^+,$$

e

$$\log z \to \log x \qquad \text{per } y \to 0^-.$$

Inoltre occorre fare attenzione dei calcoli. Dalla forma polare segue infatti che

$$\log(zw) = \log z + \log w + \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le \arg(z) + \arg(w) < 2\pi, \\ 2\pi i & \text{se } 2\pi \le \arg(z) + \arg(w) < 4\pi. \end{cases}$$

La semiretta positiva delle x si dice una retta di diramazione per il logratimo complesso. Qulche volta è conveniente spostare la semiretta su cui il logaritmo è singolare su una semiretta $x = pt, y = pt$, $t > 0$. Lo si puo' fare ponendo $a := \frac{p+iq}{\sqrt{p^2+q^2}}$ e considerando la funzione

$$\varphi(z) := \log\left(\frac{z}{a}\right).$$

Si ha infatti

$$\varphi(z) = \log z - \log a + \begin{cases} 0 \text{se } 0 \leq \arg(z) - \arg(a) < 2\pi, \\ -2\pi i \qquad\qquad \text{se } -2\pi \leq \arg(z) - \arg(a) < 0. \end{cases}$$

Potenze reali

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ si puo' definire la funzione *multivoca* ζ^α su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da

$$z^a := e^{a \log^{(k)}(z)}$$

Guardiamo quanti sono i fogli distinti di z^α. Siano $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e k, h interi, dalla periodicità dell'esponenziale e dalla (1.11) segue

$$e^{a \log^{(k)}(z)} = e^{a \log^{()}(z)} = 1$$

se e solo se

$$a2\pi i(k-h) = 2\pi i r$$

per qualche r intero. In altre parole i due fogli di z^α individuati dagli interi h e k coincidono se e solo se $a(h-k)$ è intero. Si hanno percio' i seguenti casi

(i) *a è un numero reale intero.* In questo caso tutti i fogli di z^a coincidono, la funzione $z \to z^a$ è ad un sol valore, e si ottiene l'dentità

$$z^a = e^{a \log z}$$

indipendentemente dalla determinazione scelta per il logaritmo.

(ii) *a è un numero reale razionale.* Se $a = p/q$ con p, q interi primi fra loro allora z^a ha q fogli distinti, ottenuti con $k = 0, 1, \dots, q-1$. Per ogni $k = 0, 1, \dots, q-1$ l'immagine di $z \to \log^{(k)}(z)$ è $I^{(k)}$, da cui l'immagine di $z \to \frac{1}{q}\log^{(k)}(z)$ è la striscia

$$\left\{ w = x + iy \,\middle|\, y \in [\frac{2\pi k}{q}, \frac{2\pi(k+1)}{q}[\right\}$$

ed in definitiva l'immagine del foglio k-esimo di $z^{p/q}$, $z \to exp(\frac{p}{q}\log^k(z))$ ha come immagine l'angolo

$$A_k := \left\{ z \in \mathbb{C}\arg^{(0)}(z/|z|) \in [\frac{2\pi k}{q}, \frac{2\pi k + 1}{q}[\right\}$$

cfr. la Figura **??**.

(iii) *a non è reale razionale.* In questo caso z^α ha infiniti fogli.

Osserviamo che, se si sceglie sempre lo stesso foglio in generale

$$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha.$$

Infatti

$$\frac{(zw)^\alpha}{z^\alpha w^\alpha} = exp\alpha \log(zw) - \log z - \log w = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \arg(z) + \arg(w) < 2\pi, \\ exp(2\pi i\alpha) & \text{se } 2\pi \leq \arg(z) + \arg(w) < 4\pi. \end{cases}$$

2 I teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe

Dimostreremo in questo paragrafo che le funzioni olomorfe sono tutte e sole quelle funzioni che sono localmente la somma di una serie di potenze. La derivazione è piuttosto lunga ed è una riscrittura dei teoremi del calcolo per i campi o le forme differenziali del piano.

2.1 Teorema (Edouard Goursat (1858–1936)). *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, si ha $\int_{\partial^+ R} f(z), dz = 0$.*

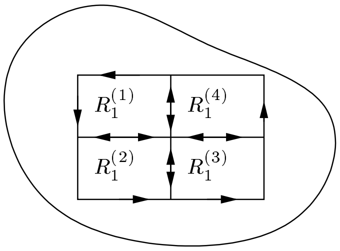

Figura 2.1.

Dimostrazione. Proviamo la (i). Diamo la dimostrazione dovuta a Edouard Goursat (1858–1936). Sia R un rettangolo con lati paralleli agli assi strettamente contenuto in Ω. L'integrale $\int_{\partial^+ R} f(z)\, dz$ è allora ben definito (f è continua in Ω). Definiamo

$$\eta(R) := \int_{\partial^+ R} f(z)\, dz \neq 0. \tag{2.1}$$

Dividiamo R in quattro rettangoli uguali $R_1^{(1)}, \dots R_1^{(4)}$. Poiche' i segmenti dei bordi comuni a due rettangoli si elidono, si ha

$$\eta(R) = \sum_{i=1}^{4} \eta(R_1^i).$$

Segue che per almeno uno di essi $R_1 := R_1^{(j)}$

$$|\eta(R_1)| \geq \frac{1}{4}\,|\eta(R)|$$

Dividendo R_1 in quattro e procedendo per induzione, si costruisce una successione di rettangoli R_n uno dentro l'altro tali che $\operatorname{diag}(R_n) = 2^{-n}\operatorname{diag}(R)$, $\operatorname{Perimetro}(R_n) = 2^{-n}\operatorname{Perimetro}(R)$ e

$$|\eta(R_n)| \geq 4^{-n}|\eta(R)|. \tag{2.2}$$

Sia ora $z^* = \cap_n \overline{R}_n$. Dalla definizione di olomorfia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ e $\overline{n}$ tali che per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $\overline{R}_n \subset B(z^*, \delta)$ e

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \epsilon\,|z - z^*| \qquad \forall z \in B(z^*, \delta)$$

da cui per ogni n sufficientemente grande si ha

$$\begin{aligned}
|\eta(R_n)| &= \left| \int_{\partial^+ R_n} \Big(f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)\,dz\Big) \right| \\
&\leq \epsilon \int_{\partial^+ R_n} |z - z^*|\,dz \leq \epsilon\,\operatorname{diag}(R_n)\ \operatorname{Perimetro}(R_n) \\
&\leq c\,4^{-n}\,\epsilon.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi dalla (2.2) che $|\eta(R) \leq c\,\epsilon$. Essendo ϵ arbitrario, si conclude che $\eta(R) = 0$. □

Segue dalla Proposizione 1.14

2.2 Corollario. *Se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa allora*

(i) *per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, esiste F olomorfa in R tale che $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in R$,*
(ii) *per ogni dominio ammissibile A per Ω si ha*

$$\int_{\partial^+ A} f(z)\,dz = 0.$$

2.3 Teorema (Formula di Cauchy, I). *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora vale la* formula di Cauchy*: per ogni dominio ammissibile A strettamente contenuto in Ω e ogni $z \in A$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

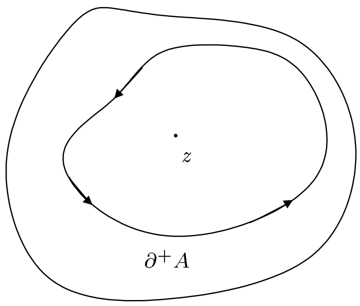

Figura 2.2.

Dimostrazione. La funzione $f(\zeta)/(\zeta - z)$ è olomorfa in $\Omega\setminus\{z\}$ e $A\setminus\overline{B(z,\delta)}$ è un dominio ammissibile per $\Omega\setminus\{z\}$ se $B(z,\delta)\subset A$. percio' dal Corollario 2.2

$$\int_{\partial^+ B_(z,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

per ogni δ sufficientemente piccolo. D'altra parte, essendo f continua in z,

$$\left|\int_{\partial^+ B(z,\delta)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \le \frac{1}{\delta}(2\pi\,\delta)\,o(1) = o(1) \qquad \text{per } \delta \to 0,$$

Inoltre, parametrizzando $\partial^+ B(z,\delta)$ con $\zeta - z = \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, si trova

$$\int_{\partial B(z,\delta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta i e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi\, i$$

In conclusione

$$\int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z)\int_{\partial^+ B(z,\delta)} \zeta - z\,d\zeta + o(1) = 2\,\pi\,i\,f(z) + o(1) \qquad \text{per } \delta \to 0,$$

Segue che $o(1)$ è identicamente nullo e la tesi è provata. □

2.4 Teorema. *Sia* $f : \overline{B(z_0,r)} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione continua su* $\overline{B(z_0,r)}$ *è tale che*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \forall z \in B(z_0,r).$$

Allora $f(z)$ *è la somma della serie di potenze complessa*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad \forall z \in B(z_0,r)$$

dove per ogni k

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta$$

Dimostrazione. Per ogni ζ con $|\zeta - z_0| = r$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k.$$

e la convergenza è totale (al variare di ζ) essendo $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Percio' integrando termine a termine, segue da (v)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right)(z - z_0)^k.$$

□

Come prime conseguenze dei Teoremi 2.1, 2.12, 2.4 and 1.15, si ottiene

2.5 Teorema. *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aperto, è olomorfa se e solo se f è localmente la somma di una serie di potenze.*

Quindi

2.6 Corollario. *Se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, allora f è di classe $C^\infty(\Omega)$, f ha derivate in senso complesso di ogni ordine in Ω. In particolare $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa.*

Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti

2.7 Corollario. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione. Sono fatti equivalenti*

(i) *f è olomorfa in Ω,*
(ii) *f è continua e $\int_{\partial^+ R} f(z)\,dz = 0$ per ogni rettangolo con i lati paralleli agli assi,*
(iii) *f è continua e ha una primitiva olomorfa su ogni rettangolo R contentuto in Ω,*
(iv) *$\int_{\partial^+ A} f(z)\,dz = 0$ per ogni dominio ammissibile A*
(v) *per ogni $B(z_0, r) \subset \Omega$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \forall z \in B(z_0, r),$$

(vi) *f è localmente la somma di una serie di potenze.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) è la tesi del Teorema 2.1. L'equivalenza fra (ii) (iii) e (iv) è contenuta nella Proposizione 1.14. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (v), (v) $\Rightarrow$ (vi), (vi) $\Rightarrow$ (i) sono rispettivamente i Teoremi 2.12, 2.4 and 1.15.

Resta da provare che (iii) $\Rightarrow$ (i). Se vale la (iii) f è localmente la derivata di una funzione olomorfa. È quindi a sua volta una funzione olomorfa per il Corollario 2.6. □

2.8 Osservazione. L'implicazione f olomorfa $\Rightarrow$ "$f \in C^1(\Omega)$" è riferita in letteratura come *teorema di Goursat*, mentre l'equivalenza tra (i) e (iii) è nota come *teorema di Morera*.

Abbiamo visto che una funzione olomorfa è localmente la somma di una serie di potenze. Si puo' essere piu' precisi. Si ha

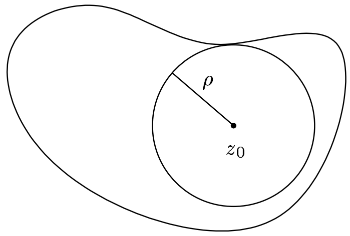

Figura 2.3.

2.9 TEOREMA. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Per ogni $z_0 \in \Omega$ detto $\rho := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, f è in tutto $B(z_0, r)$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza maggiore o uguale ad ρ. Precisamente*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad z \in B(z_0, \rho),$$

dove

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

essendo A è un arbitrario dominio ammissibile di Ω contenente al suo interno z_0.

Dimostrazione. Dai Teoremi 2.12 and 2.4 per ogni $r < \rho := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ f è la somma della serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad z \in B(z_0, r),$$

dove

$$a_k = a_k(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta. \tag{2.3}$$

Si osserva ora che $g(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{k+1}$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$, e che se A è un dominio aaammissibile in Ω e $B(z_0, \delta) \subset B(z_0, \rho) \cap A$, allora $A \setminus \overline{B(z_0, \delta)}$ e $B(z_0, r) \setminus \overline{B(z_0, \delta)}$ sono domini ammissibili per $\Omega \setminus \{z_0\}$ e quindi

$$a_k = \int_{\partial^+ B(z_0, r)} g(z)\, dz = \int_{\partial^+ B(z_0, \delta)} g(z)\, dz = \int_{\partial^+ A} g(z)\, dz. \tag{2.4}$$

In particolare gli a_k non dipendono da r e f è somma della stessa serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ in $B(z_0, \rho)$. Infine $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ per il Teorema 1.15. □

Funzioni olomorfe e differenziali

La teoria delle funzioni olomorfe è legata strettamente alla teoria dei campi del piano.

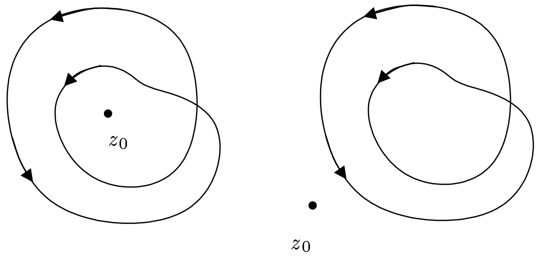

Figura 2.4. (a) $I(\gamma, z_0) = 2$, (b) $I(\gamma, z_0) = 0$.

2.10 Definizione. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C}$. Un differenziale olomorfo $f(z)dz$ si dice* chiuso *in Ω e si scrive $d(f(z)dz) = 0$, se le forme differenziali $\Re(\omega)$, $\Im(\omega)$ sono chiuse in Ω.*

In altre parole $f(z)\,dz$ è chiuso se e solo se f è di classe $C^1(\Omega)$ e, posto $f := u + iv$, $f(z)\,dz = (udx - vdy) + i(vdx + udy)$, valgono le

$$\begin{cases} u_y = v_x\,, \\ u_x = -v_y\,. \end{cases}$$

Le equazioni precedenti sono le equazioni di Cauchy-Riemann per f. Ricordando la Proposizione 1.3 e il fatto che le funzioni olomorfe sono di classe C^1, cfr. Corollario 2.6, si ha

2.11 Proposizione. *$f(z)dz$ è chiusa in Ω se e solo se f è olomorfa in Ω.*

La teoria delle forme differenziali chiuse si applica quindi al calcolo degli integrali di differenziali olomorfi $f(z)\,dz$ con f olomorfa. Si ha

2.12 Teorema. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aperto, una funzione olomorfa. Allora*
(i) *se $\gamma, \delta : [0,1] \to \Omega$ sono due curve classe C^1 a tratti e omotope fra loro, allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz,$$

(ii) *se Ω è semplicemente connesso, allora f ha una primitiva olomorfa in Ω.*

Dimostrazione. Essendo f olomorfa, f è C^1 e verifica le equazioni di Cauchy-Riemann, dunque $f(z)\,dz$ è chiusa. Segue allora dalla teoria delle forme differenziali che gli integrali di linea lungo curve omotope sono uguali. Questo prova (i).
(ii) Se Ω è semplicemente connesso, le parti reale e immaginaria di $f(z)\,dz$ hanno un potenziale $C^1(\Omega)$. Percio', cfr. la Proposizione 1.12, f ha una primitiva olomorfa in Ω. □

2.1 Indice di allacciamento

Sia $\gamma : [0,1] \to \Omega$ una curva chiusa, o *ciclo*, di classe C^1 a tratti, e sia $z \in \mathbb{C}$ con z non appartenente all'immagine di γ. L'*indice di allacciamento di γ rispetto a z*, è il numero

$$I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ad esempio, se $\gamma(t) := z + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$, allora

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ike^{ikt}}{e^{ikt}}\, dt = k.$$

Se ora $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ è una curva C^1 che non passa per z, è facile verificare che

$$\gamma(t) \qquad \text{e} \qquad \delta(t) := z + \frac{\gamma(t) - z}{|\gamma(t) - z|}$$

sono omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, una omotopia essendo data dalla retrazione di $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ su $\partial B(z, 1)$,

$$h(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\delta(t), \qquad t, s \in [0, 1].$$

Poiche' il differenziale olomorfo $\frac{d\zeta}{\zeta - z}$ è chiuso in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, segue dal Teorema 2.12 che curve omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ hanno lo stesso indice e quindi

$$I(\gamma, z) = I(\delta, z).$$

Percio' l'indice di γ in z è il *grado della curva* $t \to \frac{\gamma(t) - z}{|\gamma(t) - z|}$ da $[0, 2\pi]$ su $S^1 = \partial B(0, 1)$, cfr. Vol. III.

Segue, cfr. sempre il Vol. III, che

2.13 Proposizione. *Siano $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$. Indichiamo con $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z\}, z_0)$ il primo gruppo di omotopia di $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ con punto base z_0. Allora l'indice di allacciamento è applicazione bigettiva*

$$I(\cdot, z) : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z\}, z_0) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Si afferma che

(i) l'indice di allacciamento è lo stesso per curve omotope,
(ii) l'indice è un intero,
(iii) per ogni intero $k \in \mathbb{Z}$ esiste una curva passante per z_0 con indice di allacciamento intorno a z uguale a k,
(iv) due cruve sono omotope se e solo se hanno lo stesso indice.

2.14 ¶ Mostrare che
(i) $I(\gamma, z) = 0$ per ogni punto nella componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$.
(ii) $I(\gamma, z)$ è localmente costante in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\,(\gamma)$, e quindi costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
(iii) $I(\partial^+ B(0, 1), z) = 0$ se $z \notin \overline{B(0, 1)}$, e $I(\partial^+ B(0, 1), z) = 1$ per ogni $z \in B(0, 1)$.

2.15 Teorema (formula di Cauchy,II). *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ è una curva chiusa C^1 a tratti allora*

$$I(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

per ogni $z \notin \gamma([0, 1])$.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $B(z, r) \subset \Omega$. e sia $k := I(\gamma, z)$. Allora γ è omotopa in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ a $\delta(t) := z + re^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ perche' $I(\gamma, z) = k = I(\delta, z)$. Dalla periodicità di e^{it} e dalla formula di Cauchy, Teorema 2.1, segue allora che

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_\delta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ikt})}{e^{ikt}} ike^{ikt}\,dt = ik \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{d}\theta \\ = i\int_0^{2k\pi} \frac{e^{is}}{d} s = ki \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{d} s = k \int_{\partial^+ B(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = k2\pi\, i\, f(z).\end{aligned}$$

□

2.2 Il teorema di Liouville

Sia $f \in \Theta(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dalle (2.4) seguono le *stime di Cauchy*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\partial B(z_0,r)} |f(z)|$$

Sono stime particolarmente stringenti. Segue ad esempio il famoso

2.16 Teorema (Liouville). *Le uniche funzioni olomorfe in tutto $\mathbb{C}$ limitate sono le costanti.*

Dimostrazione. Supponiamo che $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Si ha allora per ogni $r > 0$ e ogni $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

e per $r \to +\infty$, $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Segue dal teorema fonsdamentale del calcolo che f è costante. □

Una applicazione del teorema d Liouville è una nuova dimostrazione del

2.17 Teorema (fondamentale dell'algebra). *Un polinomio complesso di grado n ha n radici.*

Dimostrazione. Basta provare che ogni polinomio complesso non costante ha almeno una radice. Sia dunque $P(z)$ un polinomio non costante e supponiamo per assurdo che $P(z) \neq 0\ \forall z$. Allora $1/P(z)$ sarebbe una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Essendo d'altra parte $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$, $1/P(z)$ è limitata. Seguirebbe dal teorema di Liouville che $1/P(z)$ è costante. Assurdo. □

Abbiamo in realtà provato

2.18 Teorema. *Sia $f \in \Theta(\Omega)$ una funzione olomorfa su Ω con $|f(z)| \geq M$ per $|z| > R$. Allora o $f(z)$ è costante o f ha uno zero.*

2.3 Principio di identità

Se una funzione olomorfa f in Ω ha in un punto x_0 tutte le derivate nulle, per la (2.4) f è la somma della serie di potenze nulla e quindi è nulla in un intorno di zero. L'insieme degli zeri di f $\Sigma := \{x \in \Omega \,|\, f(x) = g(x)\}$ è allora aperto. Poiche' d'altra parte Σ è evidentemente chiuso si conclude che Σ è la componente connessa di Ω che contiene x_0. Si è provato che

2.19 TEOREMA (PRINCIPIO DI IDENTITÀ). *Siano Ω connesso e $f, g \in \Theta(\Omega)$. Se $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ per ogni k in un punto $z_0 \in \Omega$, allora $f = g$ in Ω.*

Si ha anche

2.20 TEOREMA. *Sia Ω connesso e $f \in \Theta(\Omega)$ non identicamente nulla. Allora l'insieme degli zeri di f, $Z(f)$, è discreto e senza punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Essendo $Z(f)$ chiuso, basta provare che $Z(f)$ è discreto. Sia $z_0 \in Z(f)$. Sia k il primo intero non negativo per cui $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Si scrive allora in un intorno di z_0

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^j = (z - z_0)^k g(z)$$

con $g(z_0) \neq 0$. Essendo $g(z) \neq 0$ in un intorno U di z_0, f non ha altri zeri in U. □

In conclusione si ha

2.21 TEOREMA (PRINCIPIO DI IDENTITÀ). *Sia Ω connesso e $f, g \in \Theta(\Omega)$. Sono fatti equivalenti*

(i) *$f = g$ in Ω,*
(ii) *esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $\forall k$ si ha $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$,*
(iii) *$\{z \in \Omega \,|\, f(z) = g(z)\}$ ha almeno un punto di accumulazione.*

3 Singolarità puntuali di funzioni olomorfe

Siano Ω aperto connesso, $z_0 \in \Omega$ e $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$. z_0 si dice una *singolarità* per f. Distinguiamo tre casi

Singolarità eliminabili

Si dice che $f : \Omega \setminus \{z_0\}$ si estende in modo continuo (rispettivamente in modo olomorfo) in z_0 se esiste una funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$ continua (rispettivamente olomorfa) tale che $F = f$ su $\Omega \setminus \{z_0\}$. Se una funzione olomorfa $f : \Omega \setminus \{z_0\}$ si estende in modo olomorfo a tutto Ω, si dice che z_0 è una *singolarità eliminabile* per f.

Osserviamo che avere una estensione olomorfa in z_0 è una propietà locale. Se $f : \Omega \setminus \{z_0\}$ ha una estensione $h(z)$ olomorfa in una palla $B(z_0, \rho) \subset \Omega$, allora la funzione

$$g(z) = \begin{cases} h(z) & \text{se } z \in B(z_0, r), \\ f(z) & \text{se } z \neq z_0 \end{cases}$$

è una estensione olomorfa di f a tutto Ω.

Cominciamo con una osservazione sugli zeri di una funzione olomorfa. Diciamo che una funzione $f \in \Theta(\Omega)$ ha in $z_0 \in \Omega$ uno zero di ordine m se nello sviluppo di f in serie di potenze centrato in z_0, $f(z) = \sum_{k=0}^{i} ia_k(z-z_0)^k$, si ha $a_0 = a_1 = a_{m-1} = 0$, e $a_m \neq 0$ i.e.,

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z-z_0)^k, \qquad z \in B(z_0, r).$$

con $a_m \neq 0$.

3.1 Proposizione. *Sia $f \in \Theta(\Omega)$. e $z_0 \in \Omega$. Sono fatti equivalenti*

(i) *f ha uno zero di ordine m in z_0,*
(ii) *$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$,*
(iii) *esiste $g \in \Theta(\Omega)$ tale che $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$,*
(iv) *m è il piu' grande intero k per cui $f(z)/(z-z_0)^k$ ha una singolarità eliminabile in z_0.*

3.2 ¶ Provare la Proposizione 3.1.

3.3 Teorema (Estendibilità di Riemann). *Sia $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$. Sono fatti equivalenti*

(i) *z_0 è una singolarità eliminabile per f,*
(ii) *f si estende in modo olomorfo in z_0,*
(iii) *f si estende in modo continuo in z_0,*
(iv) *f è limitata in un intorno di $\mathbb{C}$,*
(v) $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$.

Dimostrazione. Ovviamente (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$(iv). Proviamo che (iv) $\Rightarrow$ (i). Siano

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)f(z) & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}, \qquad \text{e} \qquad h(z) := (z-z_0)g(z).$$

L'ipotesi (iv) è equivalente alla continuità di $g(z)$ in z_0, conseguentemente

$$h(z) - h(0) = h(z) = (z-z_0)g(z_0) + (z-z_0)o(1) \qquad per z \to z_0$$

In altre parole $h(z)$ è derivabile in senso complesso in z_0 con $h'(z_0) = g(z_0) = 0$. Percio' $h \in \Theta(\Omega)$, e per la Proposizione 3.1

$$h(z) = (z-z_0)^2 k(z).$$

con $k \in \Theta(\Omega)$. Percio'

$$(z - z_0)^2 f(z) = h(z) = (z - z_0)^2 k(z),$$

e quindi la funzione $k(z)$ è una estensione di f a tutto Ω. $\square$

Se $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa e f non si estende in modo olomorfo a tutto Ω si dice che z_0 è un *punto singolare* per f.

3.4 COROLLARIO. *Siano $z_0 \in \Omega$ e $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$. z_0 è un punto singolare per f se e solo se*

$$\limsup_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Poli

Sia $z_0 \in \Omega$ un punto singolare per $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$.

3.5 DEFINIZIONE. *Sia m intero, $m \geq 1$. Si dice che z_0 è un* polo *di ordine m in per $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$, o che f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se z_0 è una singolarità eliminabile per $(z - z_0)^m f(z)$ e non lo è per $(z - z_0)^k f(z)$ per ogni k, $0 \leq k < m$.*

In base al teorema di estensione di Riemann,

3.6 PROPOSIZIONE. *f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se m è il più piccolo intero k per cui $|(z - z_0)^k f(z)|$ è limitata in unintorno di z_0.*

Le singolarità polari di una funzione olomorfa sono assai ben caratterizzate. Si ha

3.7 TEOREMA. *$f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$ ha un polo in z_0 se solo se*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Inoltre, dato $m \geq 1$, sono fatti equivalenti tra loro

(i) *f ha un polo di ordine m in z_0,*
(ii) *esiste $g \in \Theta(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$ tale che*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \qquad \text{per } z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

(iii) *esiste $r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset \Omega$ e $h \in \Theta(B(z_0, r))$ priva di zeri in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ e con uno zero di ordine m in z_0 tale che $f = 1/h$ in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$,*
(iv) *esiste $B(z_0, r) \subset \Omega$ e costanti positive λ, Λ dipendenti anche da r, tali che*

$$\lambda \frac{1}{|z - z_0|^m} \leq |f(z)| \leq \Lambda \frac{1}{|z - z_0|^m} \qquad \forall z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Dimostrazione. Proviamo la seconda parte della tesi. La prima segue da (iv).
(i) $\Rightarrow$ (ii). Poiché $(z - z_0)^m f(z)$ è olomorfa fuori da z_0 e limitata, dal teorema di estendibilità di Riemann esiste g olomorfa in Ω tale che $(z - z_0)^m f(z) = g(z)$. Se $g(z_0)$ fosse zero, allora a sua volta $g(z) = (z - z_0)\widehat{g}(z)$ con $\widehat{g}$ olomorfa. La funzione

$(z-z_0)^{m-1}f(z) = \widehat{(g)}(z)$ sarebbe limitata, contraddicendo il fatto che f ha un polo di ordine m.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Se $g(z_0) \neq 0$ allora g è non nulla in una palla $B(z_0, r)$ di centro z_0 e dunque $h(z) := (z-z_0)^m/g(z)$ è olomorfa in $B(z_0, r)$, non si annulla in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ed ha uno zero di ordine m in $z = z_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sia $\rho > 0$ tale che $B(z_0, \rho) \subset \Omega$ e tale che $h(z) = (z-z_0)^m \widehat{h} \in \Theta(B(z_0, \rho))$. Posto

$$\lambda := \inf_{z \in B(z_0, \rho/2)} |\widehat{h}(z)|^{-1}, \qquad \Lambda := \sup_{z \in B(z_0, \rho/2)} |\widehat{h}(z)|^{-1}$$

si ha $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ e, essendo $f(z) = (z-z_0)^m/\widehat{h}(z)$ in $B(z_0, \rho)$, il risultato segue con $r = \rho/2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) La stima $|(z-z_0)^m f(z)| \leq \Lambda$ per ogni $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ dice che $(z-z_0)^m f(z)$ è limitata vicino a z_0, mentre la stima $|(z-z_0)^{m-1} f(z)| \geq \lambda |z-z_0|^{-1}$ diche che $(z-z_0)^{m-1} f(z)$ non è limitata in un intorno di z_0. f ha dunque un polo do ordine m in z_0. $\square$

3.8 ¶ Se P, Q sono polinomi, z_0 è uno zero di ordine m di Q e se $P(z_0) \neq 0$, allora z_0 è un polo di ordine m per $f(z) := P(z)/Q(z)$.

Singolarità essenziali

Quando un punto singolare isolato z_0 non è un polo, allora si dice che z_0 è una singolarità *essenziale*. Come conseguenza del Corollario 3.4 e del Teorema 4.34 si ottiene che *z_0 è una singolarità essenziale se solo se*

$$\liminf_{z \to z_0} |f(z)| < +\infty, \qquad \limsup_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

In realtà si ha

3.9 Proposizione. *z_0 è una singolarità essenziale per $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$ se e solo se*

$$\liminf_{z \to z_0} |f(z)| = 0, \qquad \limsup_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

3.10 ¶ Provare la Proposizione 3.9.

Dunque f ha una singolarità essenziale in z_0 se e solo se $|f(z)|$ oscillare essenzialmente tra 0 e ∞ in ogni intorno di z_0. Se si guarda ai valori di f si ha anche

3.11 Teorema (Casorati-Weierstrass). *Se f ha una singolarità essenziale in z_0 allora per ogni $\delta > 0$ $f(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano $c \in \mathbb{C}$ e $\epsilon_0 > 0$ tali che $|f(z) - c| \geq \epsilon_0$ per ogni $z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Segue che

$$\frac{f(z) - c}{z - z_0}$$

ha un polo in z_0, poiche' $|z-z_0|^{-1}|f(z)-c| \to \infty$ per $z \to z_0$. Esiste quindi $m \geq 1$ tale che

$$|z-z_0|^m|f(z)| \to 0, \qquad \text{i.e.,} \qquad (z-z_0)^m f(z)$$

ha una singolarità eliminabile in z_0; assurdo. $\square$

3.12 ¶ Provare che $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in 0.

3.13 ¶ Provare che $1/\sin z$ ha una singolarità essenziale in ogni punto $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Singolarità all'infinito

3.14 Definizione. *Si dice che $f : \{|z| > R\} \to \mathbb{C}$ ha una singolarità eliminabile, un polo di ordine $m \geq 1$ o una singolarità essenziale all'infinito se $f(1/z)$ ha rispettivamente una singolarità removibile, un polo o una singolarità essenziale in 0.*

3.15 Esempio Ad esempio
(i) z^n ha un polo all'infinito di ordine n,
(ii) $e^{1/z}$ ha una singolarià essenziale in 0 e quindi e^z ha una singolarità essenziale all'infinito.

Ogni funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ha almeno un punto singolare, al finito o all'infinito. Infatti se f ha solo singolarità eliminabili al finito, f si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, che chiamiamo ancora f. Se anche la singolarità all'infinito fosse removibile, allora f sarebbe in particolare limitata e quindi costante per il teorema di Liouville.

Punti singolari e raggio di convergenza

La definizione di punto singolare puo' estendersi a punti sul $\partial\Omega$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \in \partial\Omega$. Si dice che z_0 è un punto singolare per f se non esiste un un intorno $B(z_0, \delta)$ di z_0 e una funzione olomorfa $\widehat{f}$ definita in U tale che $\widehat{f} = f$ in $B(z_0, \delta) \cap \Omega$.

Il teorema seguente da' una proprietà della somma di una serie di potenze complessa.

3.16 Teorema. *Sia $f : B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Esiste almeno un punto $\zeta \in \partial B(z_0, \rho)$ singolare per f.

Dimostrazione. Sia $\Omega \supset B(z_0, \rho)$ l'aperto piu' grande sui cui è possibile estendere f e sia g l'estensione di f a Ω. Poiche' gli sviluppi di f e g centrati in z_0 coincidono, segue dal Teorema **??** che $\rho = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Essendo $\partial\Omega$ chiuso, esiste almeno un punto $\zeta \in \partial\Omega$ tale che $|\zeta - z_0| = \rho$. Per costruzione ζ è un punto singolare per f. $\square$

Sviluppi di Laurent

Si chiama *serie di Laurent centrata in* z_0 la somma di una serie di potenze nella variabile $z - z_0$ di raggio di convergenza ρ_2 e di una serie di potenze nella variabile $1/z - z_0$ di raggio di convergenza $1/\rho_2$ con $\rho_1 < \rho_2$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \frac{1}{(z-z_0)^k}.$$

Segue dai teoremi sulle serie di potenze che

(i) la serie di Laurent converge assolutamente,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n :== \sum_{k=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k},$$

nella corona

$$A(z_0,\rho_1,\rho_2):=\Big\{z\,\Big|\,\rho_1<|z-z_0|<\rho_2\Big\},$$

(ii) la somma è olomorfa in $A(z_0,\rho_1,\rho_2)$,

(iii) la convergenza della serie a f è uniforme in ogni compatto strettamente contenuto in $A(z_0,r_1,r_2)$, in particolare in ogni corona $A(z_0,r_1,r_2)$ con $\rho_1<r_1\le r_2<\rho_2$.

Le funzioni complesse f con un polo di ordine m in z_0, hanno uno sviluppo di Laurent con parte singolare, lo sviluppo in potenze negative di $(z-z_0)$. Infatti se $f(z)=g(z)/(z-z_0)^m$ con g olomorfa e $g(z_0)\neq 0$, si ottiene sviluppando $g(z)$ in una palla $B(z_0,r)\subset\Omega$, $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$, si ottiene

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}++\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\qquad a_{-m}\neq 0.$$

con $a_k:=b_{k+m}$, $k\ge -m$, i.e.,

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+h(z)$$

con h olomorfa.

Mostriamo ora che ogni funzione olomorfa in una corona ha uno sviluppo di Laurent sulla corona.

3.17 Teorema (Laurent). *Sia f olomorfa in $A(z_0,\rho_1,\rho_2)$, $0\le\rho_1<\rho_2\le\infty$. Allora f ha un unico sviluppo di Laurent in $A(z_0,\rho_1,\rho_2)$. Inoltre*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\qquad z\in A(z_0,\rho_1,\rho_2)$$

detta serie di Laurent *di f dove per ogni $k\in\mathbb{Z}$*

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta \tag{3.1}$$

essendo r scelto arbitrariamente in $r_1<r<r_2$.

Dimostrazione. L'unicità dello sviluppo segue dal principio di indentita' per le funzioni olomorfe. Il calcolo dello sviluppo è invece conseguenza della formula di Cauchy. Per ogni $z\in A(z_0,\rho_1,\rho_2)$ siano $r_1<r_2$ tali che $\rho_1<r_1<|z-z_0|<r_2<\rho_2$. Dalla formula di Cauchy,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+A(z_0,r_1,r_2)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\,d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_2-\epsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1+\epsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\,d\zeta.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Se $\zeta \in B(z_0, r_2)$ si ha
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$
totalmente in $\partial B(z_0, r_2)$ e analogamente
$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^k = \frac{-1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^k\\ &= -\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\end{aligned}$$
uniformemente in $A(z_0; r_1, r_2)$. Sviluppando termine a termine i due integrali in (3.2), si ottiene che
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$
in $A(z_0, r_1, r_2)$, con
$$a_k = \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial^+ B(z_0, r_2)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & \text{se } k \geq 0,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial^+ B(z_0, r_1)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & \text{se } k < 0.\end{cases}$$
Poiche' d'altra parte
$$\int_{\partial^+ B(z_0, r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta$$
non dipende da r per ogni $\rho_1 < r < \rho_2$ ($\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k}d\zeta$ è chiusa in $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$), la tesi segue. □

3.18 (Serie di Laurent e serie di Fourier) Sia f olomorfa in $A(0; 1-\epsilon, 1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ e sia
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$
il suo sviluppo di Laurent. Come sappiamo,
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$
Se poniamo $\varphi(t) := f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ si vede che la serie di Laurent è la serie di Fourier di $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

In generale la serie trigonometrica nella vriabile complessa z
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kz) + b_k \sin kz)$$
con il cambiamento di variabile $e^{iz} := \zeta$ si puo' riscrivere come diventa la serie di Laurent
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^n$$
dove

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \qquad c_n := \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & \text{se } n > 0 \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Se questa ultima serie converge in una corona $r < |\zeta| < R$, $r < 1 < R$, allora $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^n$ è una serie di Laurent con somma olomorfa. Percio' la serie trigonometrica converge totalmente nella striscia $\log r < -y < \log R$ parallela all'asse reale e la somma è una funzione olomorfa. Nel caso degenere $r = R = 1$, la serie di Fourier puo' non convergere o convergere ad una funzione discontinua, come abbiamo visto, cfr. Vol. III.

3.19 ¶ Determinare la serie di Fourier di

$$\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2}, \qquad |a| < 1.$$

[*Sugg.* Osservare che $f(e^{it}) = \varphi(t)$, se,

$$f(t) := \frac{1 - z^2}{2\,i\left[z^2 - (a + \frac{1}{a})z + 1\right]}$$

e calcolare lo sviluppo di Laurent di $f(z)$. Il risultato è $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^n \sin nt$.

4 Residui e calcolo degli integrali

Sia f olomorfa sulla corona $A(z_0; 0, \delta)$ e sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ il suo sviluppo di Laurent. Il coefficiente a_1 dello sviluppo si chiama *residuo di f in z_0* e si indica anche con

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0).$$

Come abbiamo visto,

$$Res(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

essendo r un numero arbitrario tra $0 < r < \delta$.

I residui di una funzione olomorfa con singolarità puntuali sono legati via la formula di Cauchy al calcolo di integrali curvilinei. Poiche' spesso si caclolano con metodi elementari, sono rilevanti per il calcolo di alcune classi di integrali definiti.

4.1 Teorema (residui, I). *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera regolare a tratti, siano $z_1, z_2, \dots, z_n$ punti di Ω e sia f olomorfa su Ω e continua in $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Allora*

$$\int_{\partial^+\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_j).$$

Dimostrazione. Siano $B(z_j, \delta)$ palle disgiunte fra loro e contenute in Ω. Segue dal teorema di Cauchy applicato a $\Omega \setminus \cup_{j=1} B(z_j, \delta)$ che

$$0 = \int_{\partial^+\Omega} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\partial^+ B(z_j,\delta)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial^+\Omega} f(\zeta)\, d\zeta - 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, z_j).$$

□

Sia ora f olomorfa in $\{z \,|\, |z| > r\}$. Il *residuo di f all'infinito* è definito come segue. Posto $z = 1/\zeta$, si ha

$$f(z)\, dz = -\frac{1}{\zeta^2} f(\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)\, d\zeta;$$

il residuo di f all'infinito si definisce come il residuo di $-\frac{1}{\zeta^2} f(1/\zeta)$ in 0. Quindi se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ è lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ vicino all'infinito, il residuo di f all'infinito è

$$\mathrm{Res}\,(f, \infty) = \mathrm{Res}\,\Big(-\frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\zeta^n}) = -a_{-1} = -\int_{\partial^+ B(0,\rho)} f(z)\, dz,$$

$\rho >> 1$.

4.2 Teorema (residui, II). *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$ a frontiera regolare a tratti tale che $\Omega \supset \{z \,\|\, |z| > r\}$. Siano $z_1, z_2, \dots, z_k$ punti di Ω e f olomorfa in $\Omega \setminus \{xnzk\}$ e continua in $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Allora*

$$\int_{\partial^+\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi\, i \,\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\,(f, z_j) + R(f, \infty) \Big).$$

Dimostrazione. Basta osservare che per $\rho > r$ si ha $\Omega^c \subset B(0, \rho)$ e quindi

$$\int_{\partial^+\Omega} f(z)\, dz + \int_{\partial^+ B(0,\rho)} f(z)\, dz = 2\pi\, i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}\,(f, z_j)$$

e per definizione

$$\int_{\partial^+ B(0,\rho)} f(z)\, dz = -2\pi\, i\, \mathrm{Res}\,(f, \infty).$$

□

Il calcolo dei residui

Il calcolo dei residui puo' farsi facilmente in molti casi.

(i) *f ha una singolarità eliminabile in z_0.* Se f è prolungabile in senso olomorfo in z_0, allora $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = 0$. Si noti pero' che anche

$$\mathrm{Res}\,(\frac{1}{(z - z_0)^2}, z_0) = 0.$$

(ii) *f ha un polo semplice in* z_0. Se f ha un polo semplice in z_0, allora

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Moltiplicando per $z - z_0$, si trova

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + o(|z - z_0|) \qquad \text{per } z \to z_0$$

vale a dire

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

Un caso particolare è quello in cui $f(z) = g(z)/h(z)$ dove g, h sono olomorfe e $h(z)$ ha un polo semplice in z_0, ad esempio un polinomio. Allora $h'(z_0) \neq 0$ e quindi

$$(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}g(z) \to \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad \text{per } z \to z_0.$$

(iii) *f ha un polo multiplo in* z_0. Sia f una funzione olomorfa in $A(z_0, 0, \delta)$ con un polo di ordine m in z_0. Allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad g(z_0) \neq 0.$$

moltiplicando per $(z - z_0)^m$, si ottiene una funzione con una singolarità eliminabile,

$$(z - z_0)^m f(z) = g(z), \qquad z \neq z_0.$$

Il coefficiente a_1 dello sviluppo di Laurent di f è dunque il coefficiente di $(z - z_0)^{m-1}$ dello sviluppo di g. Pertanto

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) = a_1 &= \frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}(g)(z_0) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{m-1}((z - z_0)^m f(z))(z_0). \end{aligned}$$

Un'altro modo è procedere induttivamente calcolando successivamente tutto lo sviluppo singolare. Infatti se

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$

allora

$$\begin{cases} \alpha_{-m} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z), \\ \alpha_{-m+1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{m-1} \Big(f(z) - \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} \Big) \\ \dots \\ \alpha_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \Big(f(z) - \sum_{k=-m}^{-2} a_k (z - z_0)^k \Big) \end{cases}$$

Infine. nel caso di un rapporto di polinomi, si puo' procedere induttivamente con l'algoritmo di Hermite, cfr. Vol. II.

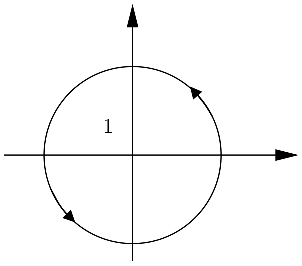

Figura 4.1.

4.3 ¶ Calcolare i residui di

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}, \qquad f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$$

direttamente e usando lo sviluppo in serie di Laurent.

4.4 ¶ Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,3)} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz.$$

4.1 Il calcolo degli integrali con il metodo dei residui

Si vogliono calcolare integrali definiti senza l'obbligo di esplicitare una primitiva dell'integrando. Se l'integrando è la restrizione all'intervallo di integrazione di una funzione olomorfa in Ω con eventualmente qualche discontinuità, si puo' pensare all'intervallo di integrazione come alla frontiera orientata, o ad un pezzo della frontiera orientata di un dominio ammissibile. La formula dei residui potrebbe permettere di calcolare l'integrale. Abbiamo qui raccolto alcuni casi interessanti. Il lettore è avvisato che non vi sono regole generali, valide in ogni caso.

4.5 (Integrali trigonometrici) Si voglia calcolare integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt,$$

dove R è una funzione razionale.

Si interpreta l'integrale come l'integrale sulla frontiera orientata di $B(0,1)$. Poiche' su $B(0,1)$ si ha

$$\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = \cos\theta, \qquad \frac{1}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) = \sin\theta, \qquad \text{se } z := e^{i\theta},$$

e dunque ponendo

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\Big(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big)$$

si ottiene
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{\partial^+ B(0,1)} f(z)\, dz.$$
Se f non ha poli su $\partial B(0,1)$, si ottiene dal teorema dei residui, Teorema 4.1,
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{\partial^+ B(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in B(0,1)} Res(f, z).$$

4.6 ¶ Se f ha poli $p_1, p_2, \dots, p_k$ su $\partial B(0,1)$, si sceglie come dominio ammissibile $B(0,1) \setminus \cup_i B(p_i, \epsilon)$, $\epsilon << 1$. Ripetendo la dimostrazione del teorema dei residui, ei prova allora mandando $\epsilon \to 0$ che
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{\partial^+ B(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in B(0,1)} Res(f, z) + \pi i \sum_{z \in \partial B(0,1)} Res(f, z).$$

4.7 Esempio Mostrare che se $a > |b|$ si ha
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$
Riscriviamo l'integrale come un integrale di linea sul bordo del cerchio unitario. Ricordando che $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$, si ha
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin\theta}\, d\theta = \int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{dz}{iz(a + b(z - z^{-1})/2i)} = \int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{2\, dz}{bz^2 + 2iaz - b}$$
La funzione $bz^2 + 2iaz - b$ si annulla nei due punti
$$z_1 := \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i, \qquad z_2 := \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i.$$
e di questi solo il primo z_1 si trova all'interno del cerchio unitario. Si tratta evidentemente di un polo semplice per $f(z) = \frac{2\, dz}{bz^2 + 2iaz - b}$ e quindi
$$Res(f, z_1) = \frac{2}{2bz_1 + 2ia} = \dots = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2} i}.$$
Dal teorema dei residui si conclude che
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin\theta} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2} i} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

4.8 ¶ Mostrare che
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p\cos t + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - p^2} & \text{se } |p| < 1, \\ \frac{2\pi}{p^2 - 1} & \text{se } |p| > 1, \end{cases} \qquad p \in \mathbb{C} \setminus \partial B(0,1),$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(p + \cos t)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2 - 1})^3}, \qquad p > 1.$$

4.9 (Integrali impropri) Si voglia calcolare in integrale improprio del tipo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$
Supponiamo di avere una funzione $f(z)$ olomorfa sul semipiano superiore $\{z \,|\, \Im z > 0\}$ tranne al piu' in un numero finito di punti nessuno dei quali è reale. e tale che $zf(z) \to 0$ per $|z| \to \infty$. Dal Teorema 4.1 per $r >> 1$

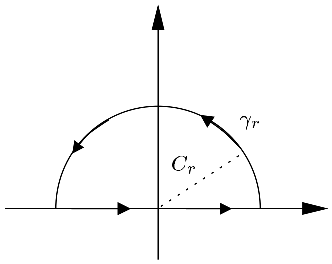

Figura 4.2.

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\Im z>0} Res(f,z)$$

essendo C_r il semicerchio in Figura 4.2 e γ_r il suo bordo superiore orientato in sendo antiorario. Posto $M(r) := \sup_{z\in\gamma_r} |f(z)|$, dall'ipotesi segue che

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le M(r)\cdot 2\pi\, r \to 0 \qquad \text{per } r\to\infty$$

e quindi f ha integrale improprio su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}\,(f,z).$$

La ricetta precedente si applica in particolare al rapporto di due polinomi $f = \frac{P}{Q}$ in cui Q non ha zeri reali.

4.10 Esempio Si calcoli

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Sia dunque C_r il semicerchio in Figura 4.2 di raggio $r >> 1$. Dato che le radici di $z^6+1=0$ sono sei distinte $z_k := e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$, $k=0,\dots,5$, esse sono tutte poli semplici di $f(z) := 1/(1+z^6)$. Di questi solo $z_0, z_1, z_2 \in C_r$. Il residuo di f in z_k, $k=0,1,2$, vale

$$Res(f,z_k) = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{1}{6}e^{-i\dfrac{5(2k+1)\pi}{6}}$$

Segue dal teorema dei residui che

$$\int_{-r}^{r}\frac{dx}{1+x^6} + \int_{\gamma_r}\frac{dz}{1+z^6} = -\frac{2\pi i}{6}\sum_{k=0}^{2} e^{-i\dfrac{5(2k+1)\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3}.$$

essendo $\gamma_r(t) := re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Poiche' per $r\to\infty$ si ha evidentemente che $\int_{\gamma_r}\frac{dz}{1+z^6}\to 0$, si conclude che

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

4.11 ¶ Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{\pi}{a^7}, \qquad a>0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{p}\frac{\frac{p}{q}\pi}{\sin\left(\frac{p}{q}\pi\right)},$$

per ogni $p,q\in\mathbb{N}$, $0<p<q$.

4.12 (Integrali di tipo Fourier)

4.13 Proposizione. *Sia $f:\Omega := \{z = x+iy \,|\, y\ge 0\}\to\mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa all'interno di Ω, con un numero finito di punti di punti singolari in Ω nessuno dei quali è reale e tale che $|f(z)|\to 0$ per $|z|\to\infty$, $z\in\Omega$. Allora per ogni $\omega>0$*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\Im z>0} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{i\omega z}, z). \tag{4.1}$$

Analogamente sia $f:\Omega := \{z = x+iy \,|\, y\le 0\}\to\mathbb{C}$ una funzione continua in Ω e olomorfa all'interno di Ω, con un numero finito di punti di punti singolari nessuno dei quali è reale e tale che $|f(z)|\to 0$ per $|z|\to\infty$, $z\in\Omega$, e sia $\omega>0$. Allora

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\Im z<0} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{-i\omega z}, z). \tag{4.2}$$

Cominciamo col provare il seguente

4.14 Lemma. *Sia $f:\Omega := \{z = x+iy \,|\, y\ge 0\}\to\mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa all'interno di Ω, con un numero finito di punti di punti singolari nessuno dei quali è reale e tale che $|f(z)|\to 0$ per $|z|\to\infty$, $z\in\Omega$. Sia γ_r il bordo orientato superiore del semicerchio C_r in figura. Allora*

$$\int_{\gamma_r} f(z)\epsilon^{i\omega x}, dz \to 0 \qquad \text{per } r\to\infty.$$

Dimostrazione. Proviamo la prima parte del teoream, la seconda è del tutto simile. Si ha

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\omega z}\,dz = \int_0^\pi f(re^{i\theta})e^{i\omega r\cos\theta}e^{-\omega r\sin\theta}ir\,d\theta$$

quindi

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\omega z}\,dz\right| \le M(r)\int_0^\pi e^{-\omega r\sin\theta}r\,d\theta$$

dove si è posto $M(r) := \sup_{z\in\gamma_r}|f(z)|$. Basta allora provare che l'integrale a destra è limitato indipendentemente da r. Usando la *diseguaglianza di Jordan* $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin\theta}{\theta}\le 1$ per $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, segue infatti

$$\int_0^\pi e^{-\omega r\sin\theta}r\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\omega r\sin\theta}r\,dt \le \frac{\pi}{2\omega}(1-e^{-r\omega}).$$

□

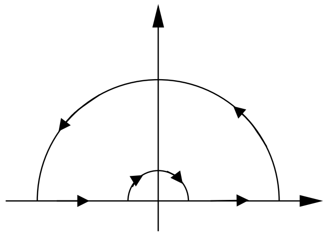

Figura 4.3.

Dimostrazione della Proposizione 4.13. Scegliendo ora r cosi' grande che i poli di f siano tutti nel semicerchio C_r, si ottiene dalla formula dei residui

$$\int_{-r}^{r} f(x)e^{i\omega x}\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\omega z}\,dz = 2\pi i \sum_{\Im z>0} Res(f,z).$$

Per $r \to \infty$ il secondo integrale tende a zero per il Lemma 4.14 e quindi la tesi. □

4.15 Esempio Mostrare che per $k > 0$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-k}.$$

La funzione $f(z) := e^{ikz}/(1+z^2)$ ha poli semplici in $z = \pm i$. Considerando il circuito in Figura 4.2, si ha

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{ikx}dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_r} \frac{e^{ikz}}{1+z^2}\,dz = Res(f,i) = 2\pi i\frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-k}.$$

Mandando quindi $r \to \infty$, il secondo integrale a sinistra tende a zero, pertanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \pi e^{-k}$$

e la tesi segue essendo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$.

4.16 ¶ Si provi che se $a > 0$ e $b > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x-ib}\,dx = 2\pi i e^{-ab}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x+ib}\,dx = 0.$$

Da queste sommando e sottraendo ritrovare le *formule di Laplace*

$$\int_0^\infty \frac{\beta\cos\alpha x}{x^2+\beta^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ab}, \qquad a,b>0.$$

Da notare che il secondo è un integrale improprio.

4.17 ¶ Mostrare che se g è olomorfa, e γ_e è il bordo superiore del semicerchio $B(0,\epsilon)\cap\{y>0\}$ allora

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{g(z)}{z}\,dz = \frac{g(z_0)}{2} = \frac{1}{2}Res\Big(\frac{g(z)}{z},z\Big).]$$

4.18 ¶ Per $\alpha = 1$, $\beta = 0$, le formule di Laplace dell'Esercizio 4.16 suggeriscono che

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Si provi quest'ultima formula escludendo lo zero con un semicerchio con raggio piccolo. [*Sugg.* Considerare la funzione $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$, integrare sul cammino $\gamma_{\epsilon,r}$ in Figura 4.3 e usare l'Esercizio 4.17 e il Lemma 4.14.]

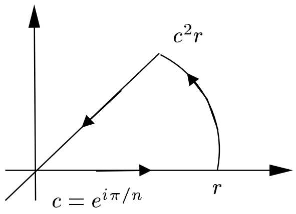

Figura 4.4.

4.19 Esempio Calcolare gli integrali (impropri) di Fresnel

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Si considera la funzione $f(z) := e^{iz^2}$ che non ha poli su $\mathbb{C}$ e si integra lungo la curva in Figura 4.4 composta delle tre curve

$$\gamma_1(t) = t,\ t \in [0, r], \qquad \gamma_2(t) = \frac{t(1+i)}{\sqrt{2}},\ t \in [0, r]$$

e $\gamma_3(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$. Si ha allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$$

e d'altra parte

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^r e^{ix^2}\,dx$$
$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^r e^{-t^2}\,dt \to \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$
$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/4} ire^{ir^2\theta^2}e^{i\theta}\,d\theta$$

Poiche' $i(cos\theta + i\sin\theta)^2 = i\cos(2\theta) - r^2\sin 2\theta$ il terzo interale si stima in modulo con

$$\int_0^{\pi/4} re^{-r^2\sin(2\theta)}\,d\theta \le \int_0^{\pi/4} re^{-r^2\frac{4}{\pi}\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{4r}(1 - e^{-r^2})$$

e dunque converge a zero per $r \to \infty$. In definitiva mandando $r \to \infty$ si conclude che l'integrale improprio di e^{ix^2} su $(0, +\infty)$ esiste e

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{ix^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i).$$

Con un cambiamento di variabile, $x = \sqrt{t}$, $t > 0$ si ottiene anche

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4.20 ¶ Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2 - \sigma^2}\,dx.$$

4.21 (Integrali di tipo Mellin)

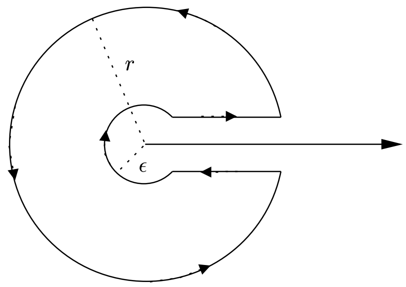

Figura 4.5.

4.22 PROPOSIZIONE. *Sia f una funzione olomorfa con un numero finito di singolarità, tutte fuori dal semiasse reale* positivo *e $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Supponiamo che $f(x) \to 0$ per $x \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$. Sia z^α il foglio principale di z^α e $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x+iy, x > -, y = 0\}$. Allora*

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \sum_{z \neq 0} \mathrm{Res}\Big(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z\Big).$$

Dimostrazione. Sia $g(z) := \frac{f(z)}{z^\alpha}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Indichiamo cn $\gamma_{r,\epsilon,\delta}$ il bordo orientato di $D_{r,\epsilon\delta}$ in Figura **??** avendo scelto $r >> 1$, $\epsilon << 1$ e $\delta << \epsilon$ in modo che tutti i poli di f escluso al piu' 0 siano contenuti in $D_{r,\epsilon,\delta}$. Dal teorema dei residui,

$$\int_{\gamma_{r,\epsilon,\delta}} g(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} Res\Big(g(z), z\Big).$$

per ogni r, ϵ, δ. D'altra parte, se indichiamo con γ_+ e γ_- i due tratti orizzontali orientati come l'asse delle x e osserviamo che se $z = x + iy$, $x > 0$ e $y \to 0^+$, allora, cfr. la (1.12),

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \to e^{\alpha \log x} = x^\alpha \qquad \text{per } y \to 0^+$$
$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \to e^{\alpha \log x + i2\pi\alpha} = e^{2\pi i\alpha} x^\alpha \qquad \text{per } y \to 0^-.$$

e dunque per $\delta \to 0$, si ottiene che

$$\int_{\gamma_{r,\epsilon,\delta}} g(z)\, dz \to (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_e^r g(x)\, dx + \int_\partial^+ B(0,r) g(z)\, dz) - \int_{\partial^+ B(0,\epsilon)} g(z)\, dz.$$

Percio'

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_\epsilon^r \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx + \int_{\partial^+ B(0,r)} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz - \int_{\partial^+ B(0,\epsilon)} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} Res\Big(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z\Big). \tag{4.3}$$

D'altra parte per il Lemma 4.14 $\int_{\partial^+ B(0,r)} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz \to 0$ per $r \to \infty$ e

$$\Big| \int_{\partial^+ B(0,\epsilon)} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz \Big| \leq M(\epsilon)\epsilon^{-\alpha} 2\pi\epsilon \to 0 \qquad \text{per } \epsilon \to 0.$$

Passando al limite nella (4.3) per $r \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ si ottiene la tesi. □

4.23 ¶ Mostrare che $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$.

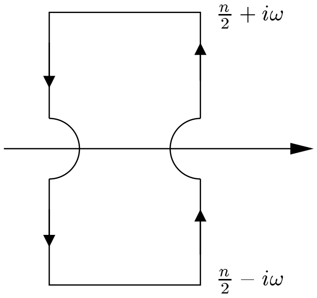

Figura 4.6.

4.24 (Somme di Gauss) Sono definite da

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}}$$

Sia

$$f(z) := \frac{2\exp(2\pi z^2/n)}{e^{2\pi iz} - 1}$$

i cui poli $0, \pm1, \pm2, \dots$ sono semplici con residui rispettivi $\frac{1}{\pi i} e^{2\pi i k^2/n}$. Integrando sul percorso in Figura 4.6, si trova

$$S_n = 2i(1 + i^{3n})\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-2\pi i t^2}\, dt,$$

per cui

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k^2} n = \frac{1}{2}(1+i)(1+i^{3n})\sqrt{n}.$$

4.25 ¶ Calolare lo sviluppo asintotico di $\int_x^\infty e^{-t} t\, dt$.

4.26 (Somme di serie di funzioni) Sia $f(z)$ una funzione olomorfa con singolarità puntuali fuori dai punti $0, \pm1, \pm2, \dots$. Allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = 2\pi i \sum_z Res\Big(\frac{\pi cos \pi z}{\sin \pi z} f(z), z\Big),$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = 2\pi i \sum_z Res\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z), z\Big),$$

Proviamo la prima, lasciando al lettore la dimostrazione della seconda formula, del resto del tutto analoga.

Infatti, detta $g(z) := f(z)\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$, è facile convincersi che $\int_{\gamma_n} g(z)\, dz$ sul contorno in Figura **??** tende a zero per $n \to \infty$. Segue che

$$\sum_z Res(g,z) = 0.$$

Ora le singolarità di g dovute al $\sin \pi z$ i..e. nei punti $0, \pm 1, \dots, \pm 2$ sono semplici e dunque se n è uno di questi,

$$Res(g,n) = \frac{f(n)\pi\cos(\pi n)}{\pi\, cos \pi n} = f(n).$$

Percio' per ogni intero n

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = -2\pi i \sum_{z \in C_n, z \text{ polo di } f} Res(g,z) + o(1).$$

Per $n \to \infty$ si ha la tesi.

4.27 ¶ Calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth a, \ a \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}\Big(\frac{\sinh 2\pi a + \sin 2\pi a}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi a}\Big)$$

4.28 Esempio Si provi che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi\log 2, \qquad \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

4.2 Ulteriori conseguenze della formula di Cauchy

Teorema dell'indicatore logaritmico

4.29 Teorema (indicatore logaritmico). *Sia Ω limitato (con frontiera regolare a tratti), e sia f una funzione non nulla su $\partial\Omega$ che abbia in Ω zeri in $a_1, a_2, \dots, a_h$ con molteplicità $p_1, p_2, \dots, p_h$ e al piu' singolarità polari in in $z_1, z_2, \dots, z_k$ con ordini $q_1, q_2, \dots, q_k$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+\Omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{h} p_j - \sum_{j=1}^{k} q_j = \#\text{zeri di } f - \#\text{poli di } f.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+\Omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{h} \operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a_j\Big) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}, b_j\Big).$$

In un intorno di a_j si ha

$$f(z) = \varphi(z)(z - z_0)^{p_j}, \qquad \varphi \text{ olomorfa, } \varphi(a_j) \neq 0$$

e

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(z)(z - w_j)^{m_j} + \varphi(z)\, m_j(z - w_j)^{m_j - 1}}{\varphi(z)(z - w_j)^{m_j}} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{m_j}{z - w_j},$$

i.e., $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, w_j\right) = m_j$.

Analogamente in un intorno di z_j, $f(z) = \psi(z)(z - z_j)^{-n_j}$ con ψ olomorfa e $\psi(z_j) \neq 0$. Segue che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{n_j}{z - z_j},$$

i.e., $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = -n_j$. □

4.30 Teorema. *SiaSia Ω limitato (con frontiera regolare a tratti), e sia f una funzione non nulla su $\partial\Omega$ che abbia in Ω al piu' singolarità* polari *$z_1, z_2, \dots, z_k$ con ordini $n_1, n_2, \dots, n_k$; siano poi $w_1, w_2, \dots, w_h$ gli zeri di f con molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_h$. Sia infine g una funzione olomorfa in Ω. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+\Omega} g(z)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{h} m_j g(w_j) - \sum_{j=1}^{k} n_j g(x_j).$$

4.31 ¶ Provare il Teorema 4.30.

4.32 ¶ Nelle ipotesi del teorema dell'indicatore logaritmico, calcolare

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+\Omega} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+\Omega} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

4.33 ¶ Provare il seguente

Teorema (Jensen (??)). *Sia $f(z)$ olomorfa con un numero finito di zeri $a_1, a_2, \dots, a_k$ di molteplicità $p_1, p_2, \dots, p_k$ e di poli $b_1, b_2, \dots, b_h$ di molteplicità $q_1, q_2, \dots, q_h$. Supponiano inoltre che $f(0)$ esista e sia non nullo. Allora*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|f(0)| + \sum_{i=1}^{k} p_i \log(R/|a_i|) - \sum_{i=1}^{h} q_i \log(R/|b_i|).$$

[*Sugg.* Utilizzare il Teorema 4.30.]

4.34 Teorema (Rouché). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato a frontiera regolare a tratti e f, g funzioni olomorfe in Ω e continue in $\overline{\Omega}$. Se*

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)| \qquad \forall \zeta \in \partial\Omega,$$

allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{\Omega}$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in [0,1]$, le funzioni $h_t(z) := g(z) + t(f(z) - g(z))$ sono olomorfe in Ω e continue in $\overline{\Omega}$. Sono in particolare regolari in Ω. Inoltre dall'ipotesi,

$$|g(\zeta) + t(f(\zeta) - g(\zeta))| \leq |\gamma(\zeta)| - t|f(\zeta) - g(\zeta)| > 0$$

per ogni $t \in [0,1]$. Segue dal teorema dell'indicatore logaritmico che

$$\int_{\partial + \Omega} \frac{h_t(\zeta)}{h_t(\zeta)}\, d\zeta = \#\ \text{zeri di } h_t.$$

Ora la quantità a sinistra è continua in t. Dunque il numero di zeri di h_t (contati con la loro molteplicità), varia con continuità al variare di $t \in [0,1]$. Essendo una quantità intera, essa deve essere costante, in particolare

$$\#\ \text{zeri } g = \#\ \text{zeri } h_0 = \#\ \text{zeri } h_1 = \#\ \text{zeri } f.$$

□

4.35 ¶ Provare che Sia Ω una aperto connesso e f olomorfa in Ω non costante. Sia $z_0 \in \Omega$ una radice di molteplicità k dell'equazione $f(z) = a$, Allora per ogni intorno sufficientemente piccolo U di z_0, esiste un intorno V di a tale che per ogni $b \in V$, l'equazione $f(z) = b$, $z \in U$ ha esattamente k soluzioni distinte. [*Sugg.* Osservare che

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial + B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial + B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\, d\zeta$$

per b vicino ad a, quindi i $B(z_0,\rho)$ l'equazione $f(z) = b$ ha k radici se contate con la loro molteplicità: esse sono poi semplici perché in $B(z_0,\rho) \setminus \{z_0\}$ si puo' supporre che $f' \neq 0$.]

5 Principio di massimo

Sia Ω un dominio liomitato di $\mathbb{C}$ e $f \in \Theta(\Omega)$. Se $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$, aabbiamo dalla formula di cauchy

$$f(z_0) = frac12\pi \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Si dice che f ha la proprietà della media.

Una conseguenza è

5.1 Teorema (Principio di massimo). *Se $f \in \Theta(\Omega)$. Se $|f|$ ha un massimo relativo interno, allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di massimo relativo interno per $|f|$. Possiamo supporre, moltiplicando f per una costante, che $f(z_0)$ sia reale e non negativo. Poniamo

$$M(r) := \sup_\theta |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

Per ipotesi $M(r) \leq |f(z_0)| = f(z_0)$ per r piccolo e per la proprietà della media $M(r) \leq f(z_0)$, da cui $f(z_0) = M(r)$ per ogni r piccolo. Ovviamente

$$\begin{aligned} &\Re(f(z_0) - f(z)) \geq 0 \qquad \text{per } |z - z_0| = r \text{ piccolo, e} \\ &\Re(f(z_0) - f(z)) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad f(z) = f(z_0). \end{aligned}$$

Dalla proprietà della media

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(z_0) - f(z_0 + re^{i\theta}))\, d\theta = 0$$

segue che $f(z) = f(z_0)$ su tutto il cerchio $|z - z_0| = r$, per l'arbitrarietà di r, f è quindi costante su una palla centrata in z_0, e salla connessione di Ω segue che f è costante in tutto Ω. □

Una conseguenza immediata è il cosidetto

5.2 Teorema (Principio di massimo). *Se $f \in \Theta(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora*

$$|f(z)| \leq sup_{\partial\Omega}|f(z)| \qquad \forall z \in \overline{\Omega}$$

e, se f non è costante,

$$|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f(z)| \qquad z \in \Omega.$$

Dalla formula di cauchy e dal principio do massimo seguono ora in modo immediato vari teoremi di convergenza per le funzioni olomorfe.

5.3 Teorema (Weierstrass). *Il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo.*

5.4 Teorema (Morera). *Sia $\{f_k\} \subset \Theta(\Omega)$. Se $\{f_k\}$ converge uniformemente ad f sui compatti di Ω, allora f è olomorfa in Ω e $f_k^{(j)} \to f^{(j)}$ uniformemente sui compatti di Ω.*

Dalla formula di Cauchy, l'equilimitatezza di una successione di funzioni olomorfe inplica l'equilimitatezza dlle loro derivate; segue allroa dal teorema di Ascoli-Arzelà

5.5 Teorema (Montel). *Sia $\{f_k\}$ unasuccessione di funzioni olomorfe in $\partial\Omega$ equilimitate sui compatti, Allora esiste una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti*

e ancora

5.6 Teorema (Vitali). *Sia $\{f_k\} \subset \Theta(\Omega)$ una successione equilimitata su ogni compatto di Ω. Sia $\{z_n\}$ una successione con un punto limite $z_0 \in \Omega$. Se $\{f_k\}$ converge puntualmente in $\{z_n\} \cup \{z_0\}$, allora $\{f_k\}$ converge uniformemente sui compatti.*

Proviamo ancora un teorema classico di convergenza

5.7 Teorema (Hurwitz). *Sia $\{f_k\} \subset \Theta(\Omega)$ una successione convergente uniformememtne ad f. Allora*

(i) *Se* $f \neq 0$, $B(z_0, r) \subset\subset \Omega$ *e* $f(z) \neq 0$ *in* $\partial B(z_0, r)$, *allora esiste* $\overline{n}$ *tale che per ogni* $n \geq \overline{n}$ f_n *e* f *hanno lo stesso numero di zeri in* $B(z_0, r)$,

(ii) *Se le* f_n *sono iniettive ed* f *non è costante, allora* f *è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $\delta := \inf\{|f(z)| \,|\, |z - z_0| = r\} > 0$. Poiche' $f_k \to f$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ $f_n(z) \neq 0$ per $z \in \partial B(z_0, r)$ e $|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\delta < |f(z)|$. (i) segue allora dal teorema di Rouché. Proviamo ora la (ii). Supponiamo che f non sia inettiva, i.e., che esistano z, w distinti con $f(z) = f(w)$. Sia r tale che $B(z, 2r) \subset \Omega \subset \{w\}$. Poniamo $F := f - f(w)$ e $F_n := f - f_n(w)$. Le F_n sono olomorfe e mai nulle in $B(z, 2r)$. Poiche' $F(z) = 0$, segue da (i) che $F = 0$ in $B(z, r)$. Sarebbe allora $F = 0$ in Ω. f è allora costante in Ω. $\square$