1. Equazioni alle differenze di ordine superiore a due

La discussione sulla risoluzione delle equazioni alle differenze lineari di ordine k, $k > 2$, si sviluppa seguendo le indicazioni della teoria delle equazioni del secondo ordine.

1.1 Il caso omogeneo

Una equazione alle differenze di ordine k è una relazione algebrica soddisfatta da k termini successivi di una successione $\{x_n\}$,

$$a_k x_{n+k} + \dots a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \qquad \forall n \geq 0,$$

o in breve

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x_{n+j} = 0, \qquad n \geq 0,\ a_k \neq 0. \tag{1.1}$$

Si dice che $\{x_n\}$ è una soluzione dell'equazione alle differenze. Ovviamente vi è una unica soluzione della (1.1) non appena risultano fissati i primi k elementi della successioen x_0, x_1, $\dots$, x_{k-1}. D'altra parte è presto visto che lo spazio di tutte le soluzioni di (1.1) è uno spazio vettoriale. Si conclude quindi che

1.1 Teorema. *La spazio delle soluzioni di* (1.1) *è uno spazio vettoriale di dimensione k.*

Vediamo ora di descrivere una base dell'insieme delle soluzioni. Per questo consideriamo il *polinomio caratteristico* dell'equazione dato da

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j.$$

$P(\lambda)$ ha quindi k radici se contate con le loro molteplicità. Per ogni radice $\lambda \in \mathbb{C}$ si indica con q_λ la molteplicità della radice λ. Deve dunque essere

$$\sum_{\lambda \text{ radice}} q_\lambda = k.$$

Costruiamo ora k successioni, costruendo per ogni radice λ di $P(\lambda)$ di molteplicità q_λ, le q_λ successioni

$$\{\lambda^n\}, \{n\lambda^n\}, \{n^2\lambda^n\}, \dots, \{n^{q_\lambda - 1}\lambda^n\}. \tag{1.2}$$

1.2 Teorema. *Le k successioni costruite in* (1.2) *sono una base su $\mathbb{C}$ per l'insieme delle soluzioni (complesse) dell'equazione alle differenze* (1.1).

Per una dimostrazione, vedere ad esempio E. Salinelli, F. Tomarelli, Modelli dinamici discreti, Springer, pp.34-38.

A partire dal teorema precedente si puo', come per il caso delle equazioni del secondo ordine, trovare una base su $\mathbb{R}$ dell'insieme delle soluzioni reali nel caso in cui i coefficienti dell'equazione $a_0, a_1, \dots, a_k$ sono reali. Costruiamo k successioni nel seguente modo. Per ogni radice λ *reale* di $P(\lambda)$ di molteplicità q_λ, consideriamo le q_λ successioni

$$\{\lambda^n\}, \{n\lambda^n\}, \{n^2\lambda^n\}, \dots, \{n^{q_\lambda - 1}\lambda^n\}. \tag{1.3}$$

Per ogni radice λ complessa con $\Im(\lambda) > 0$ di molteplicità q_λ, scriviamo $\lambda = \rho(cos\theta + i \sin\theta)$ e consideriamo le $2q_\lambda$ successioni

$$\begin{aligned} &\{\rho^n \cos(n\theta)\}, \{n\rho^n \cos(n\theta)\}, \dots, \{n^{q_\lambda - 1}\rho^n \cos(n\theta)\}, \\ &\{\rho^n \sin(n\theta)\}, \{n\rho^n \sin(n\theta)\}, \dots, \{n^{q_\lambda - 1}\rho^n \sin(n\theta)\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.3 Teorema. *Le k successioni costruite in* (1.3),(1.4) *sono una base su $\mathbb{R}$ dell'insieme delle soluzioni reali dell'equazione alle differenze* (1.1).

Per una dimostrazione, vedere ad esempio E. Salinelli, F. Tomarelli, Modelli dinamici discreti, Springer, pp.34-38.

Dalla struttura della base selezionata segue immediatamente il

1.4 Corollario. *Tutte le soluzioni $\{x_n\}$ di* (1.1) *tendono a zero per $n \to \infty$ se e solo se tutti le radici dell'equazione caratteristica hamo modulo minore di* 1. *Piu' precisamente se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono le radici dell'equazione caratteristica* e $\max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_k|) < L < 1$, *allora $|x_n| = o(L^n)$ per $n \to \infty$.*

1.2 Il caso non omogeneo

Data una successione $\{f_n\}$, $n \geq 1$, si puo' voler trovare una successione x_n tale che

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x_{n+j} = f_{n+1}, \qquad n \geq 0,\ a_k \neq 0. \tag{1.5}$$

Per linearitá, è facile convincersi che la differenza di due soluzioni di (1.5) è una soluzione dell'omogenea associata (1.1). Segue che per determinare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea (1.5), è sufficiente conoscere una base delle soluzioni dell'equazione omogenea (1.1), e una sola soluzione dell'equazione nonomogenea (1.5), come si dice *una soluzione particolare*.

La seguente procedura, simile al metodo della variazione delle costanti o alla formula di Duhamel per le equazioni differenziali ordinarie, permette di ottenere una soluzione particolare.

Indichiamo con $\{u_n\}$ la soluzione dell'equazione *omogenea* con dati

$$\sum_{j=0}^{k} a_j u_{n+j} = 0 \qquad n \geq 0,$$

con dati iniziali $u_0 = u_1 = \dots u_{k-2} = 0$, $u_{k-1} = 1$. $\{u_n\}$ si dice la successione *indicatrice* dell'equazione alle differenze (1.5).

Poniamo $f_0 = 0$ e indichiamo con $(u * f)_n$ il termine n-esimo della *convoluzione discreta* tra le successioni $\{u_n\}$ e $\{f_n\}$ definito da

$$(u * f)_n := \sum_{i=0}^{n} u_{n-i} f_i.$$

1.5 Teorema. *La successione* $y_n := \frac{1}{a_k}(u * f)_n$, $n \geq 0$, *è la soluzione di*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = f_{n+1}, & n \geq 0, \\ y_0 = y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si calcola

$$\begin{cases} a_k y_0 = (u * f)_0 = u_0 f_0 = 0 \\ a_k y_1 = (u * f)_1 = u_0 f_1 + u_1 f_0 = 0 \\ \dots \\ a_k y_{k-1} = (u * f)_{k-1} = u_{k-1} f_0 + u_{k-2} f_1 + \dots u_0 f_{k-1} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0. \end{cases}$$

Inoltre, sempre tenendo condo dei valori iniziali di $\{u_n\}$, si calcola per $j = 1, \dots k$

$$a_k y_{n+j} = (u * f)_{n+j} = \sum_{i=0}^{n+j} u_{n+j-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} u_{n+j-i} f_i + \begin{cases} 0 & \text{se } j < k \\ f_{n+1} & \text{se } j = k \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} &= \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{1}{a_k} (\sum_{i=0}^{n} u_{n+j-i} f_i + \delta_{jk} f_{n+1}) = \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{1}{a_k} \sum_{i=0}^{n} u_{n+j-i} f_i + f_{n+1}) \\ &= \frac{1}{a_k} \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j u_{n-i+j}) f_i + f_{n+1} = \frac{1}{a_k} \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot f_i + f_{n+1} = f_{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$