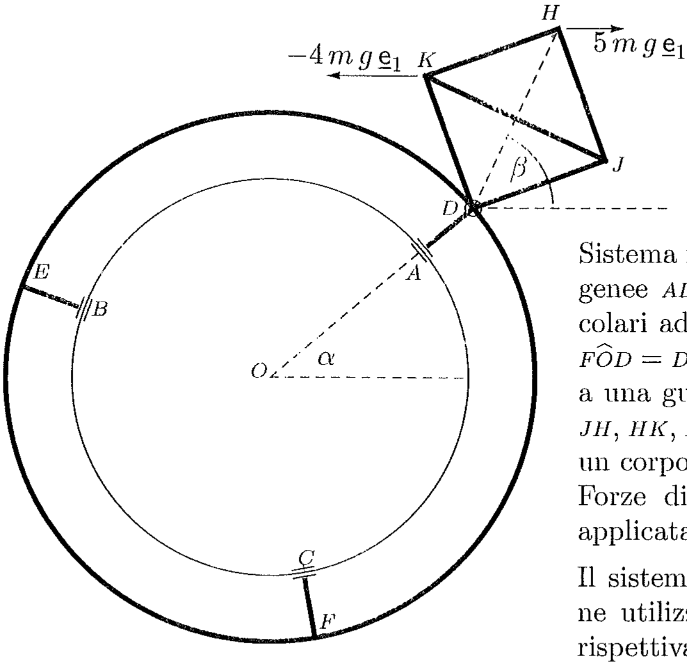
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
PROVA SCRITTA DEL 7/1/13, parte II

COGNOME: PAPINI	NOME: MARTINA
MATRICOLA: 4942529	CdL: CIVILE

Riservato alla correzione: [13]

	a △▽	b □□	c □□	d □	e □	f
30	√	√	√	√	√	



$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = R$, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2\,R$,
$\overline{DH} = 2\,R$, $\overline{DJ} = \overline{JH} = \overline{HK} = \overline{DK} = \overline{DH}/\sqrt{2}$,
masse delle aste:
AD, BE, CF : $5\,m$, JK : $3\,m$,
DJ, HK : $6\,m$, JH, DK : $4\,m$,
massa dell'anello: $3\,m$.

Sistema meccanico piano **verticale**, vincoli lisci. Le tre aste omogenee AD, BE e CF sono saldate all'anello omogeneo, perpendicolari ad esso, rispettivamente in D, E e F, in modo tale che sia $F\hat{O}D = D\hat{O}E = 2\pi/3$. Gli estremi A, B e C delle aste sono vincolati a una guida circolare di centro O. Le cinque aste omogenee DJ, JH, HK, DK e JK sono vincolate tra di loro negli estremi a formare un corpo rigido, come mostrato in figura.
Forze direttamente applicate: le forze peso, la forza $5\,m\,g\,\underline{e}_1$ applicata in H, e la forza $-4\,m\,g\,\underline{e}_1$ applicata in K.

Il sistema ha due gradi di libertà. Come coordinate Lagrangiane utilizzare gli angoli polari (α, β) dei vettori $A-O$ ed $H-D$, rispettivamente.

AVVERTENZA: *Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.*

Trovare $\boxed{\text{a}}$ il potenziale e $\boxed{\text{b}}$ l'energia cinetica del sistema; $\boxed{\text{c}}$ scrivere le equazioni di Lagrange; $\boxed{\text{d}}$ trovare le configurazioni di equilibrio e, $\boxed{\text{e}}$ per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = mgR\left(3\cos\alpha - 69\sin\alpha + 6\cos\beta - 19\sin\beta\right)$$

$$K = mR^2\left(\frac{329}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{56}{3}\dot{\beta}^2 + 69\cos(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\right)$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$\begin{cases} \boxed{R\left(329\,\ddot{\alpha} + 69\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\beta} + 69\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\beta}^2\right) = -g\left(3\sin\alpha + 69\cos\alpha\right)} \\ \boxed{R\left(69\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\alpha} + \frac{112}{3}\,\ddot{\beta} - 69\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}^2\right) = -g\left(6\sin\beta + 19\cos\beta\right)} \end{cases}$$

Configurazioni di equilibrio: 23

$$\text{I}\ \begin{cases} \alpha = -\arctan\left(\frac{69}{3}\right) \\ \beta = -\arctan\left(\frac{19}{6}\right) \end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases} \alpha = \pi - \arctan\left(\frac{69}{3}\right) \\ \beta = -\arctan\left(\frac{19}{6}\right) \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} \alpha = -\arctan\left(\frac{69}{3}\right) \\ \beta = \pi - \arctan\left(\frac{19}{6}\right) \end{cases} \qquad \text{IV}\ \begin{cases} \alpha = \pi - \arctan\left(\frac{69}{3}\right) \\ \beta = \pi - \arctan\left(\frac{19}{6}\right) \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H) = mgR\begin{pmatrix} 69\sin\alpha - 3\cos\alpha & 0 \\ 0 & 19\sin\beta - 6\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$(H_{I}) = mgR\begin{pmatrix} -3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & -\sqrt{397} \end{pmatrix}$$

det $H_I > 0$, autovalori negativi

MASSIMO $\rightarrow$ equilibrio STABILE

$$(H_{II}) = mgR\begin{pmatrix} 3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & -\sqrt{397} \end{pmatrix}$$

det $H_{II} < 0$

punto di SELLA

$$(H_{III}) = mgR\begin{pmatrix} -3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & \sqrt{397} \end{pmatrix}$$

det $H_{III} < 0$

punto di SELLA

$$(H_{IV}) = mgR\begin{pmatrix} 3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & \sqrt{397} \end{pmatrix}$$

det $H_{IV} > 0$, autovalori positivi

MINIMO $\rightarrow$ equilibrio INSTABILE