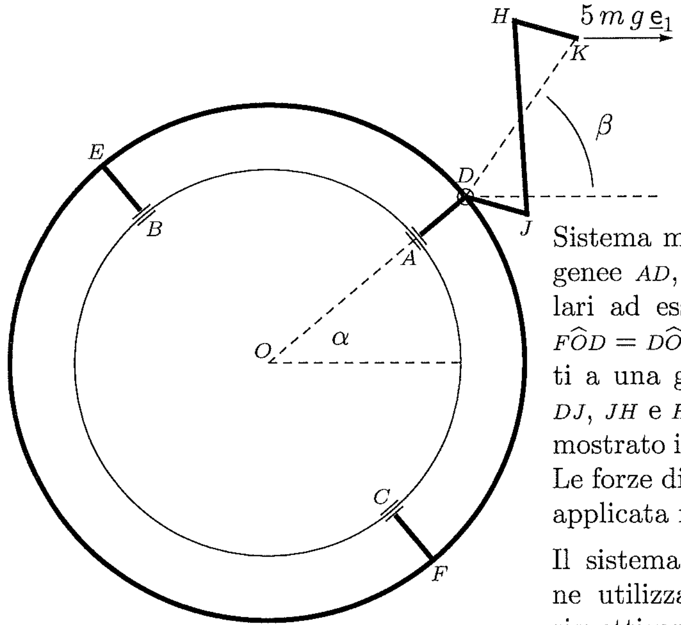
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
PROVA SCRITTA DEL 3/9/12, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione: [01]

	a △▽	b ▭	c ▭	d ▫	e ▫	f



$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DJ} = \overline{HK} = R$, $\overline{JH} = 2\,R$,
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2\,R$,
masse delle aste:
$AD : 5\,m$, $BE : 6\,m$, $CF : 8\,m$,
$DJ : 3\,m$, $JH : 4\,m$, $HK : 3\,m$,
massa dell'anello: $3\,m$.

Sistema meccanico piano **verticale**, vincoli lisci. Le tre aste omogenee AD, BE e CF sono saldate all'anello omogeneo, perpendicolari ad esso, rispettivamente in D, E e F, in modo tale che sia $F\hat{O}D = D\hat{O}E = \pi/2$. Gli estremi A, B e C delle aste sono vincolati a una guida circolare di centro O. Le altre tre aste omogenee DJ, JH e HK sono saldate tra loro a formare un corpo rigido, come mostrato in figura: i punti D, J, H e K sono i vertici di un rettangolo. Le forze direttamente applicate sono le forze peso e la forza $5\,m\,g\,\underline{e}_1$ applicata nell'estremo K.

Il sistema ha due gradi di libertà. Come coordinate Lagrangiane utilizzare gli angoli polari (α, β) dei vettori $A-O$ ed $K-D$, rispettivamente.

AVVERTENZA: *Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.*

Trovare $\boxed{\text{a}}$ il potenziale e $\boxed{\text{b}}$ l'energia cinetica del sistema; $\boxed{\text{c}}$ scrivere le equazioni di Lagrange; $\boxed{\text{d}}$ trovare le configurazioni di equilibrio e, $\boxed{\text{e}}$ per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = mgR\left(-\frac{85}{2}\sin\alpha + 20\cos\alpha - 10\sin\beta + 10\cos\beta\right)$$

$$K = mR^2\left(\frac{356}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{49}{6}\dot{\beta}^2 + 30\cos(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta}\right)$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$\begin{cases} R\left(\frac{712}{3}\ddot{\alpha} + 30\cos(\alpha-\beta)\ddot{\beta} + 30\sin(\alpha-\beta)\dot{\beta}^2\right) = -g\left(20\sin\alpha + \frac{85}{2}\cos\alpha\right) \\ R\left(30\cos(\alpha-\beta)\ddot{\alpha} + \frac{49}{3}\ddot{\beta} - 30\sin(\alpha-\beta)\dot{\alpha}^2\right) = -10g\left(\sin\beta + \cos\beta\right) \end{cases}$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\text{I}\ \begin{cases} \alpha = -\arctan\frac{17}{8} \\ \beta = \frac{7}{4}\pi \end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases} \alpha = \pi - \arctan\frac{17}{8} \\ \beta = \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} \alpha = -\arctan\frac{17}{8} \\ \beta = \frac{3}{4}\pi \end{cases} \qquad \text{IV}\ \begin{cases} \alpha = \pi - \arctan\frac{17}{8} \\ \beta = \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H) = mgR\begin{pmatrix} \frac{85}{2}\sin\alpha - 20\cos\alpha & 0 \\ 0 & 10\sin\beta - 10\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$(H_{I}) = mgR\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{353} & 0 \\ 0 & -10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ equilibrio STABILE

$$(H_{II}) = mgR\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{353} & 0 \\ 0 & -10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ punto di sella

$$(H_{III}) = mgR\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{353} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ punto di sella

$$(H_{IV}) = mgR\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{353} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ equilibrio INSTABILE