

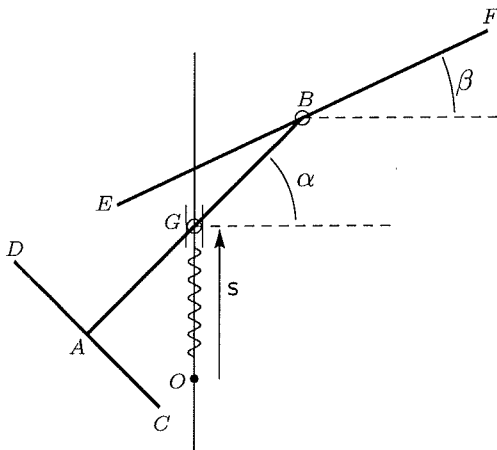
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 25/6/12, parte II

COGNOME:	NOME:	
MATRICOLA:	CdL (sigla):	ORALE:

Riservato alla correzione:

[01]

	a $\Delta \nabla$	b \square	c \square	d \square	e \square	f \square
						X



AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

$\overline{AB} = 2\ell$, $\overline{CD} = 4\ell$, $\overline{EF} = 6\ell$,
 massa dell'asta $AB = 3m$,
 massa dell'asta $CD = 5m$, massa dell'asta $EF = 8m$,
 costante elastica della molla: $5mg/\ell$.

Sistema meccanico piano **verticale**, vincoli lisci. Le aste omogenee AB e CD sono saldate ad angolo retto in A punto medio di CD ; l'asta AB è vincolata nel suo centro G , mediante un carrello con cerniera, a una guida rettilinea verticale; l'asta omogenea EF è incernierata nel suo centro all'estremo B dell'asta AB .

Le forze direttamente applicate sono le forze peso, la forza esercitata da una molla di lunghezza a riposo nulla che collega G al punto fisso O sulla guida, e le forze costanti: $2mg\mathbf{e}_1$, applicata in E , e $3mg\mathbf{e}_2$, applicata in F .

Il sistema ha tre gradi di libertà. Come coordinate Lagrangiane utilizzare la quota s di G rispetto ad O , e gli angoli polari (α, β) dei vettori $B - A$ ed $F - E$, rispettivamente.

Trovare **a** il potenziale e **b** l'energia cinetica del sistema; **c** scrivere le equazioni di Lagrange; **d** trovare le configurazioni di equilibrio e, **e** per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = mg \left(-13s - \frac{5}{2\ell} s^2 + 2\ell \cos \alpha + 9\ell \sin \beta - 6\ell \cos \beta \right)$$

$$K = 8m \dot{s}^2 + \frac{31}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + 12m \ell^2 \dot{\beta}^2 + 3m \ell \cos \alpha \dot{s} \dot{\alpha}$$

Equazioni di moto:

$$16m\ddot{s} + 3ml\cos\alpha\ddot{\alpha} - 3ml\sin\alpha\dot{\alpha}^2 = -13mg - \frac{5mg}{l}s$$

$$3ml\cos\alpha\dot{s} + \frac{62}{3}ml^2\dot{\alpha} = -2mgl\sin\alpha$$

$$24ml^2\dot{\beta} = mgl(6\sin\beta + 9\cos\beta)$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} s = -\frac{13}{5}l \\ \alpha = 0 \\ \beta = -\arctan\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} s = -\frac{13}{5}l \\ \alpha = \pi \\ \beta = -\arctan\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} s = -\frac{13}{5}l \\ \alpha = 0 \\ \beta = \pi - \arctan\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} s = -\frac{13}{5}l \\ \alpha = \pi \\ \beta = \pi - \arctan\frac{3}{2} \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H) = \begin{pmatrix} -5mg/l & 0 & 0 \\ 0 & -2mgl\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ mgl(6\cos\beta - 9\sin\beta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(H_I) = \begin{pmatrix} -\frac{5mg}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -2mgl & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{13}mgl \end{pmatrix}$$

punto di sella
(autovalori di segno discorde)

$$(H_{II}) = \begin{pmatrix} -5mg/l & 0 & 0 \\ 0 & 2mgl & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{13}mgl \end{pmatrix}$$

punto di sella

$$(H_{III}) = \begin{pmatrix} -5mg/l & 0 & 0 \\ 0 & -2mgl & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{13}mgl \end{pmatrix}$$

tre autovalori negativi
 \Rightarrow massimo di $U \Rightarrow$
 \Rightarrow equilibrio stabile

$$(H_{IV}) = \begin{pmatrix} -5mg/l & 0 & 0 \\ 0 & 2mgl & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{13}mgl \end{pmatrix}$$

punto di sella