

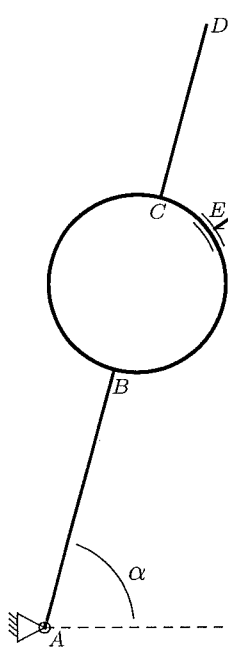
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 11/6/12, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL (sigla): ORALE:

Riservato alla correzione:

[01]

	a $\Delta \nabla$	b \square	c \square	d \square	e \square	f
						X



AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

$\overline{AB} = 2R$, $\overline{BC} = 2R$, $\overline{CD} = 4R$, $\overline{EF} = 6R$,
 massa dell'asta $AB = 3m$, massa dell'anello = $4m$,
 massa dell'asta $CD = 5m$, massa dell'asta $EF = 8m$.

Sistema meccanico piano **verticale**, vincoli lisci. Le aste omogenee AB e CD e l'anello omogeneo (circonferenza) sono saldate come in figura a formare un corpo rigido (le aste sono disposte l'una sul prolungamento dell'altra, saldate in punti diametralmente opposti dell'anello); l'asta AB è vincolata a una cerniera fissa in A ; l'asta omogenea EF è vincolata in modo tale che l'estremo E stia sull'anello, e l'asta rimanga sempre perpendicolare all'anello.

Le forze direttamente applicate sono le forze peso e la forza $-mg e_1$ applicata in F .

Il sistema ha due gradi di libertà. Come coordinate Lagrangiane utilizzare gli angoli polari (α, β) dei vettori $B-A$ ed $F-E$, rispettivamente.

Trovare **a** il potenziale e **b** l'energia cinetica del sistema; **c** scrivere le equazioni di Lagrange; **d** trovare le configurazioni di equilibrio e, **e** per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = -mgR (6g \sin \alpha + 3 \cos \alpha + 32 \sin \beta + 7 \cos \beta)$$

$$K = \frac{454}{3} m R^2 \dot{\alpha}^2 + 76 m R^2 \dot{\beta}^2 + 96 m R^2 \cos(\alpha - \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{908}{3} m R^2 \ddot{\alpha} + 96 m R^2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} + 96 m R^2 \sin(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2 &= \\ &= mgR (3 \sin \alpha - 69 \cos \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 96 m R^2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} + 152 m R^2 \ddot{\beta} - 96 m R^2 \sin(\alpha - \beta) \dot{\alpha}^2 &= \\ &= mgR (7 \sin \beta - 32 \cos \beta) \end{aligned} \right\}$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} \alpha = \arctan 23 \\ \beta = \arctan \frac{32}{7} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} \alpha = \pi + \arctan 23 \\ \beta = \arctan \frac{32}{7} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} \alpha = \arctan 23 \\ \beta = \pi + \arctan \frac{32}{7} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} \alpha = \pi + \arctan 23 \\ \beta = \pi + \arctan \frac{32}{7} \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{\text{I}}) = mgR \begin{pmatrix} 3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & \sqrt{1073} \end{pmatrix}, \begin{cases} \det H > 0 \\ H_{11} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{equilibrio INSTABILE}$$

$$(H_{\text{II}}) = mgR \begin{pmatrix} -3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & \sqrt{1073} \end{pmatrix}, \det H < 0 \Rightarrow \text{punto di sella di } U$$

$$(H_{\text{III}}) = mgR \begin{pmatrix} 3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1073} \end{pmatrix}, \det H < 0 \Rightarrow \text{punto di sella}$$

$$(H_{\text{IV}}) = mgR \begin{pmatrix} -3\sqrt{530} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1073} \end{pmatrix}, \begin{cases} \det H > 0 \\ H_{11} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{equilibrio STABILE}$$