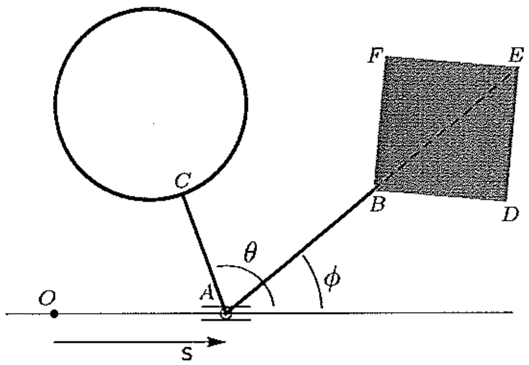
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
PROVA SCRITTA DEL 13/2/12, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione: [01]

	a △▽	b □□	c □□	d □	e □	f



AVVERTENZA: *Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.*

Raggio della ciconferenza $= R$,
$\overline{AB} = 2\,R$, $\overline{AC} = 2\,\overline{AB}/3$, $\overline{BE} = 2R$,

massa dell'asta AB : $3\,m$, massa dell'asta AC : $4\,m$,
massa della circonferenza: $6\,m$, massa della lamina : m

$\underline{F}_A(x_1, x_2) = 2\,k\,x_1\,\underline{e}_1$, $\underline{F}_B(x_1, x_2) = -3\,k\,x_1\,\underline{e}_1$,
$\underline{F}_C(x_1, x_2) = 8\,k\,R\,\underline{e}_2$.

Sistema meccanico piano **orizzontale**, vincoli lisci. Le aste omogenee AB e AC sono mutuamente incernierate nell'estremo comune A, che è vincolato a una guida rettilinea. La lamina quadrata omogenea $BDEF$ è saldata all'asta AB in modo tale che la sua diagonale BE stia sul prolungamento dell'asta stessa. Una circonferenza rigida omogenea è saldata all'asta AC in modo tale che asta e circonferenza siano mutuamente ortogonali in C. Le forze direttamente applicate sono *solamente* le tre forze $\underline{F}_A$, $\underline{F}_B$ e $\underline{F}_C$, applicate rispettivamente in A, B e C, la cui espressione è scritta sopra in un riferimento cartesiano del piano tale che l'asse x_1 coincida con la guida. Il sistema ha tre gradi di libertà. Utilizzare le coordinate Lagrangiane (s, ϕ, θ) mostrate in figura. Trovare $\boxed{a}$ il potenziale e $\boxed{b}$ l'energia cinetica del sistema; $\boxed{c}$ scrivere le equazioni di Lagrange; $\boxed{d}$ trovare le configurazioni di equilibrio e, $\boxed{e}$ per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = -\frac{k}{2} s^2 - 6kRs\cos\phi - 6kR^2\cos^2\phi + \frac{32}{3}kR^2\sin\theta$$

$$K = 7m\dot{s}^2 + \frac{20}{3}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{554}{27}mR^2\dot{\theta}^2 - 6mR\sin\phi\,\dot{s}\dot{\phi} - \frac{50}{3}mR\sin\theta\,\dot{s}\dot{\theta}$$

VOLTARE PAGINA

13/2/12

Equazioni di moto:

$$
\begin{cases}
14m\ddot{s} - 6mR\sin\phi\,\ddot{\phi} - \frac{50}{3}mR\sin\theta\,\ddot{\theta} - 6mR\cos\phi\,\dot{\phi}^2 - \frac{50}{3}mR\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = \\
\qquad = -Ks - 6KR\cos\phi \\
\frac{40}{3}mR^2\ddot{\phi} - 6mR\sin\phi\,\ddot{s} = \\
\qquad = 6KRs\sin\phi + 12KR^2\sin\phi\cos\phi \\
\frac{1108}{27}mR^2\ddot{\theta} - \frac{50}{3}mR\sin\theta\,\ddot{s} = \frac{32}{3}KR^2\cos\theta
\end{cases}
$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\mathrm{I})\begin{cases} s=-6R \\ \phi=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \mathrm{II})\begin{cases} s=-6R \\ \phi=0 \\ \theta=\frac{3}{2}\pi\end{cases} \quad \mathrm{III}\begin{cases} s=6R \\ \phi=\pi \\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \mathrm{IV}\begin{cases} s=6R \\ \phi=\pi \\ \theta=\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$

$$\mathrm{V})\begin{cases} s=0 \\ \phi=\frac{\pi}{2} \\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \mathrm{VI})\begin{cases} s=0 \\ \phi=\frac{\pi}{2} \\ \theta=\frac{3}{2}\pi\end{cases} \quad \mathrm{VII}\begin{cases} s=0 \\ \phi=\frac{3}{2}\pi \\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \mathrm{VIII})\begin{cases} s=0 \\ \phi=\frac{3}{2}\pi \\ \theta=\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$

$$(H_{\mathrm{I}}) = (H_{\mathrm{III}}) = \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & -24KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix}$$

3 autovalori negativi $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ equilibrio stabile

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{\mathrm{II}}) = (H_{\mathrm{IV}}) = \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & -24KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix}$$

autovalori di segno diverso $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ punto di sella del potenziale

$$(H_{\mathrm{V}}) = \begin{pmatrix} -K & 6KR & 0 \\ 6KR & -12KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix} \qquad (H_{\mathrm{VI}}) = \begin{pmatrix} -K & 6KR & 0 \\ 6KR & -12KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix}$$

$$(H_{\mathrm{VII}}) = \begin{pmatrix} -K & -6KR & 0 \\ -6KR & -12KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix} \qquad (H_{\mathrm{VIII}}) = \begin{pmatrix} -K & -6KR & 0 \\ -6KR & -12KR^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{32}{3}KR^2 \end{pmatrix}$$

Le ultime 4 sono matrici a blocchi. Poiché il blocco delle prime due righe e colonne ha determinante negativo, contiene autovalori di segno opposto. Pertanto le configurazioni V-VI-VII-VIII sono punti di sella del potenziale.