

Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 23/1/12, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione:

[01]

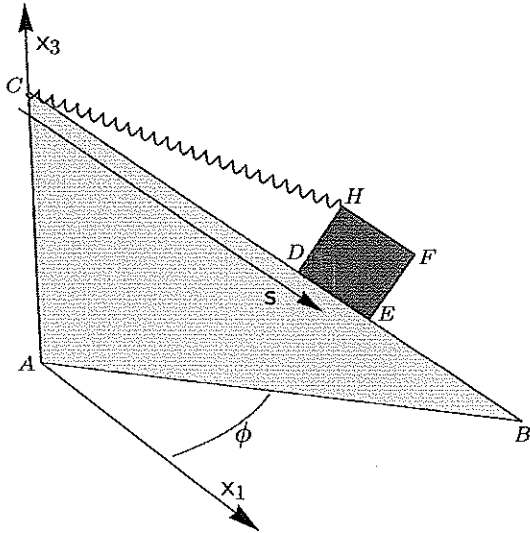
a: 6	b: 8	c: 8	d: 4	e: 4	f
					X

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

$\overline{AC} = 3\ell$, $\overline{BC} = 12\ell$, $\overline{DE} = 2\ell$,
 costante della molla = $6\text{ mg}/\ell$, $\underline{F}_B = 6\text{ mg}\underline{e}_1 + 8\frac{\text{mg}}{\ell}x_2\underline{e}_2$,
 massa del triangolo = 4 m , massa del quadrato = 5 m ,

Sistema meccanico non piano, vincoli lisci. La lamina omogenea ABC , avente la forma di un triangolo rettangolo, ha il cateto AC fissato in configurazione verticale. La lamina quadrata omogenea $DEFH$ ha il lato D vincolato a scorrere sull'ipotenusa AB del triangolo. Le forze direttamente applicate sono: le forze peso, la forza della molla di lunghezza a riposo nulla attaccata negli estremi ai punti C ed H , e la forza \underline{F}_B , la cui espressione è scritta sopra, applicata in B .

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare le coordinate Lagrangiane (s, ϕ) mostrate in figura (s è la distanza tra C e il punto medio di DE).



Trovare [a:6 pt] il potenziale e [b:8 pt] l'energia cinetica del sistema; [c:6 pt] scrivere le equazioni di Lagrange; [d:6 pt] trovare le configurazioni di equilibrio e, [e:4 pt] per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = -3\frac{\text{mg}}{\ell}s^2 + \frac{29}{4}\text{mg}s + 18\sqrt{15}\text{mg}\ell\cos\phi + 540\text{mg}\ell\sin^2\phi$$

$$K = \frac{5}{2}m\dot{s}^2 + m\left(\frac{75}{32}s^2 + \frac{5\sqrt{15}}{16}\ell s + \frac{4415}{96}\ell^2\right)\dot{\phi}^2$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$5m\ddot{s} - \frac{75m}{16}s\dot{\phi}^2 - \frac{5\sqrt{15}}{16}ml\dot{\phi}^2 = -\frac{6mg}{e}s + \frac{23}{4}mg$$

$$\frac{75}{16}m s^2 \ddot{\phi} + \frac{5\sqrt{15}}{8}ml s \ddot{\phi} + \frac{445}{48}ml \dot{\phi}^2 + \frac{75m}{8}s \dot{\phi} + \frac{5\sqrt{15}}{8}ml \dot{s} \dot{\phi} = -18\sqrt{15}mg l \sin\phi + 1080mg l \sin\phi \cos\phi$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\text{I)} \begin{cases} s = \frac{23}{24}l \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} s = \frac{23}{24}l \\ \phi = \pi \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} s = \frac{23}{24}l \\ \phi = \arccos(1/4\sqrt{15}) \end{cases}$$

$$\text{IV)} \begin{cases} s = \frac{23}{24}l \\ \phi = 2\pi - \arccos(1/4\sqrt{15}) \end{cases}$$

$$(H_I) = \begin{pmatrix} -\frac{6mg}{e} & 0 \\ 0 & 1080 - 18\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

$$(H_{II}) = \begin{pmatrix} -\frac{6mg}{e} & 0 \\ 0 & 1080 + 18\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{III}) = \begin{pmatrix} -\frac{6mg}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2151}{2}mgl \end{pmatrix} = (H_{IV})$$

Nelle configurazioni I) e II) la matrice Hessiana ha autovalori di segno opposto, quindi si tratta di punti di sella di U .
Nelle configurazioni III) e IV) si hanno due autovalori negativi, quindi si tratta di massimi del potenziale (equilibrio stabile).