

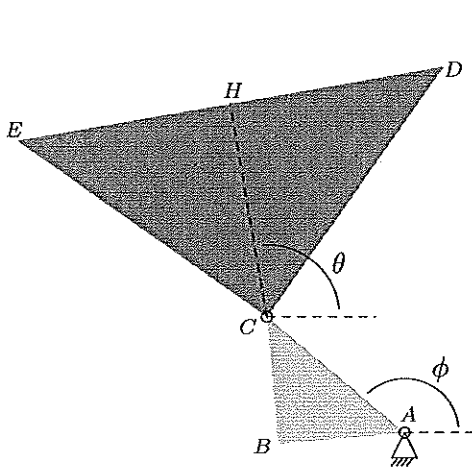
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 11.7.11, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione:

[01]

a: 6	b: 8	c: 8	d: 4	e: 4	f
					X



$\overline{AC} = 2l, \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}/\sqrt{2},$
 $\overline{ED} = 13l, \overline{CD} = \overline{CE} = \overline{ED}/\sqrt{2},$
 massa di $ABC: 6m,$ massa di $CDE: 8m.$

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

Sistema meccanico piano **orizzontale**, vincoli lisci; lamine omogenee mutuamente incernierate in C ; inoltre la lamina ABC è vincolata a una cerniera fissa in A . Nel punto B è applicata la forza $\underline{F}_B \equiv k(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$, dove k è una costante positiva; nel punto D è applicata la forza $\underline{F}_D \equiv k(5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2)$; nel punto E è applicata la forza $\underline{F}_E \equiv 18k\mathbf{e}_2$ (espressioni in un riferimento cartesiano con origine in A).

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare coordinate Lagrangiane (ϕ, θ) , angoli polari (nel medesimo riferimento cartesiano) dei vettori $C-A$ e $H-C$ (essendo H il punto di mezzo del lato DE).

Trovare [a:6 pt] il potenziale e [b:8 pt] l'energia cinetica del sistema; [c:6 pt] scrivere le equazioni di Lagrange; [d:6 pt] trovare le configurazioni di equilibrio e, [e:4 pt] per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = kl \left(49 \sin \phi + 17 \cos \phi + \frac{377}{2} \sin \theta + \frac{221}{2} \cos \theta \right)$$

$$K = 20 m l^2 \dot{\phi}^2 + \frac{388}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{208}{3} m l^2 \cos(\phi - \theta) \dot{\phi} \dot{\theta}$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ell^2 \left(40 \dot{\phi} + \frac{208}{3} \cos(\phi-\theta) \ddot{\theta} + \frac{208}{3} \sin(\phi-\theta) \dot{\theta}^2 = \right. \\ \left. = k\ell (-17 \sin\phi + 49 \cos\phi) \right) \\ \\ m\ell^2 \left(\frac{208}{3} \cos(\phi-\theta) \dot{\phi} + \frac{676}{3} \ddot{\theta} - \frac{208}{3} \sin(\phi-\theta) \dot{\phi}^2 = \right. \\ \left. = k\ell \left(-\frac{221}{2} \sin\theta + \frac{377}{2} \cos\theta \right) \right) \end{array} \right.$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} \phi = \arctan(49/17) \\ \theta = \arctan(29/17) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} \phi = \pi + \arctan(49/17) \\ \theta = \arctan(29/17) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} \phi = \arctan(49/17) \\ \theta = \pi + \arctan(29/17) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} \phi = \pi + \arctan(49/17) \\ \theta = \pi + \arctan(29/17) \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio:

Posto $a = \sqrt{2690}$, $b = 13\sqrt{565/12}$, l'Hessiano nelle 4 configurazioni di equilibrio è:

$$(H_{\text{I}}) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad (H_{\text{II}}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$(H_{\text{III}}) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (H_{\text{IV}}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Discussione della stabilità:

- I) Due autovalori negativi di H , equilibrio stabile (massimo di U).
 IV) Due autovalori positivi di H , equilibrio instabile (minimo di U).
 II e III) Autovalori di segno discorde, punti di sella di U .