

Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 7.2.11, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione:

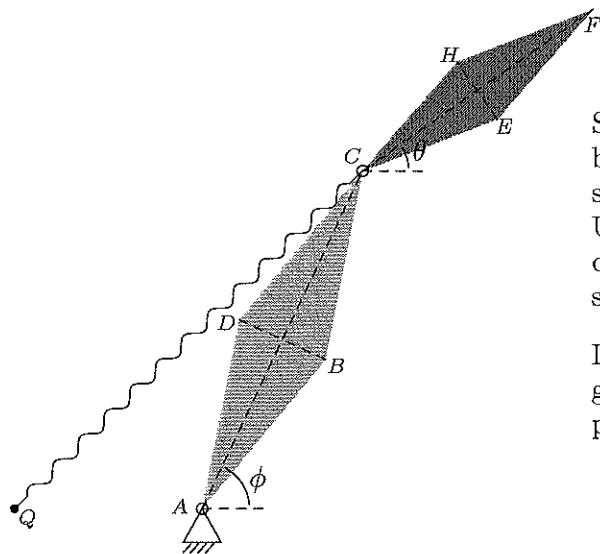
[12]

a: 6	b: 8	c: 8	d: 4	e: 4	f
					X

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

$$\overline{QA} = 10\ell, \overline{AC} = 22\ell, \overline{BD} = \overline{AC}/4,$$

$$\overline{CF} = 18\ell, \overline{EH} = \overline{CF}/4.$$



Sistema meccanico piano verticale, vincoli lisci. Le lamine romboidali omogenee $ABCD$, di massa $6m$, e $CEFH$, di massa $4m$, sono vincolate con una cerniera in C e con una cerniera fissa in A . Una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $5mg/\ell$ collega il vertice comune C delle due lamine al punto Q , posto alla stessa quota di A .

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare coordinate Lagrangiane (ϕ, θ) dove ϕ è l'angolo polare del vettore $C - A$ e θ è l'angolo polare del vettore $F - C$, come mostrato in figura.

Trovare [a:6 pt] il potenziale e [b:8 pt] l'energia cinetica del sistema; [c:6 pt] scrivere le equazioni di Lagrange; [d:6 pt] trovare le configurazioni di equilibrio e, [e:4 pt] per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = -mg\ell (154 \sin \phi + 1100 \cos \phi + 36 \sin \theta)$$

$$K = \frac{4464g}{32} m \ell^2 \dot{\phi}^2 + \frac{3051}{16} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + 792 m \ell^2 \cos(\phi - \theta) \dot{\phi} \dot{\theta}$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$l \left(\frac{4464g}{16} \ddot{\phi} + 792 \cos(\phi - \theta) \ddot{\theta} + 792 \sin(\phi - \theta) \dot{\theta}^2 \right) = g (1100 \sin \phi - 154 \cos \phi)$$

$$l \left(792 \cos(\phi - \theta) \ddot{\phi} + \frac{3051}{8} \ddot{\theta} - 792 \sin(\phi - \theta) \dot{\phi}^2 \right) = -36g \cos \theta$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} \phi = \arctan \frac{7}{50} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} \phi = \arctan \frac{7}{50} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} \phi = \pi + \arctan \frac{7}{50} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} \phi = \pi + \arctan \frac{7}{50} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

nonendo $A \equiv 22\sqrt{2519}$ si ha:

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{\text{I}}) = mgl \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det H_{\text{I}} > 0 \\ H_{11}, H_{22} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{minimo di } U \text{ (equilibrio instabile)}$$

$$(H_{\text{II}}) = mgl \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_{\text{II}} < 0 \Rightarrow \text{punto di sella di } U$$

$$(H_{\text{III}}) = mgl \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_{\text{III}} < 0 \Rightarrow \text{punto di sella}$$

$$(H_{\text{IV}}) = mgl \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det H_{\text{IV}} > 0 \\ H_{11}, H_{22} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{massimo di } U \text{ (equilibrio stabile)}$$