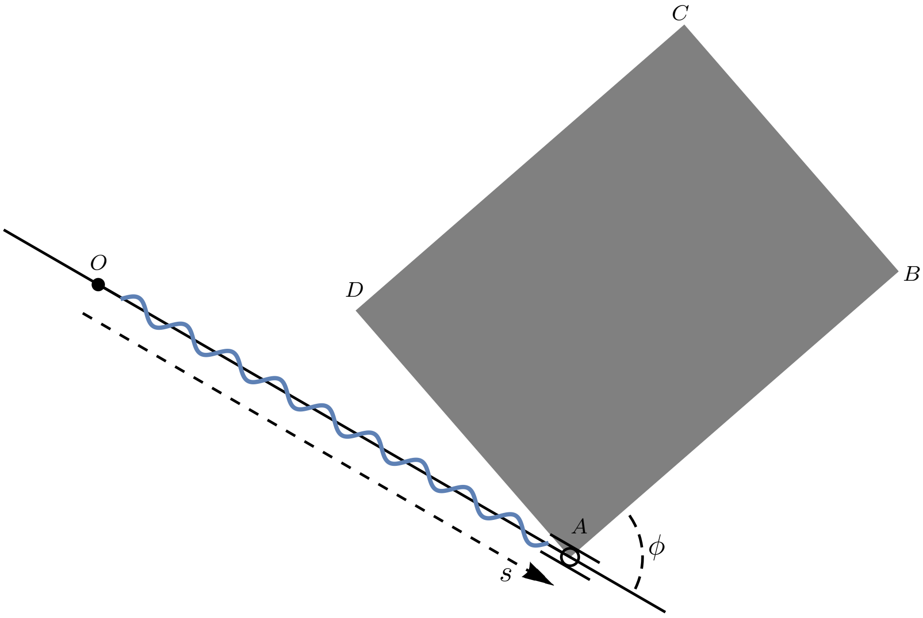
Meccanica Razionale M-Z - Ingegneria Meccanica - Università di Firenze
PROVA SCRITTA DEL 16 GIUGNO 2020



DATI:
$\overline{AB} = \overline{CD} = 4\,\ell$
$\overline{BC} = \overline{AD} = 3\,\ell$
massa della lamina: m
costante della molla: $m\,g/\ell$

Sistema meccanico olonomo **piano verticale**, vincoli lisci.

La lamina rettangolare omogenea $ABCD$ è vincolata nel vertice A a un *carrello*, che scorre su una guida rettilinea inclinata di 30° rispetto all'orizzontale.

Le forze attive sono costituite dalle forze peso dalla forza elastica di una molla, avente lunghezza a riposo nulla, che unisce A con il punto fisso O ubicato sulla guida.

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare le coordinate Lagrangiane (s, ϕ), dove:

- s è l'ascissa del punto A, *lungo la guida*, con origigine in O (crescente verso il basso)
- ϕ è l'angolo tra il vettore $B - A$ e la guida (crescente in senso antiorario nel diseegno).

Trovare $\boxed{\textbf{a}}$ il potenziale e $\boxed{\textbf{b}}$ l'energia cinetica del sistema; $\boxed{\textbf{c}}$ scrivere l'equazione di Lagrange; $\boxed{\textbf{d}}$ trovare le configurazioni di equilibrio e, $\boxed{\textbf{e}}$ scrivere la matrice Hessiana del potenziale, valutarla in ciascuna configurazione di equilibrio e discutere la stabilità.

Meccanica Razionale M-Z - Ingegneria Meccanica - Università di Firenze

PROVA SCRITTA DEL 16 GIUGNO 2020

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Soluzione:

$$\mathcal{U} = mg\left[-\frac{s^2}{2\ell} + \frac{s}{2} + \ell\left(\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\cos\phi - \left(\frac{3}{4}+\sqrt{3}\right)\sin\phi\right)\right]$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{25}{6}m\ell^2\dot{\phi}^2 - m\ell\left(2\sin\phi + \frac{3}{2}\cos\phi\right)\dot{s}\dot{\phi}$$

Equazione di Lagrange (2 componenti):

$$\begin{cases} \ddot{s} - \ell\left(2\sin\phi + \frac{3}{2}\cos\phi\right)\ddot{\phi} + \ell\left(\frac{3}{2}\sin\phi - 2\cos\phi\right)\dot{\phi}^2 = g\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{\ell}\right) \\ -\ell\left(2\sin\phi + \frac{3}{2}\cos\phi\right)\ddot{s} + \frac{25}{3}\ell^2\ddot{\phi} = g\ell\left[(3\sqrt{3}-4)\sin\phi - \left(\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)\cos\phi\right] \end{cases}$$

VOLTARE PAGINA

Configurazioni di equilibrio:

$$\text{I}\quad \begin{cases} s = \dfrac{\ell}{2} \\ \phi = \arctan \dfrac{48+25\sqrt{3}}{11} \end{cases} \qquad \left[\simeq 1.45089 < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} s = \dfrac{\ell}{2} \\ \phi = \pi + \arctan \dfrac{48+25\sqrt{3}}{11} \end{cases}$$

Hessiano e stabilità dell'equilibrio:

$$(H) = \begin{pmatrix} -\dfrac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell\left[\left(\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)\sin\phi + \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}-1\right)\cos\phi\right] \end{pmatrix}$$

$$(H_{\text{I}}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & -\dfrac{5(4+3\sqrt{3})}{2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}\, mg\ell \end{pmatrix}$$

$$(H_{\text{II}}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & +\pentagon \cdot mg\ell \end{pmatrix}$$