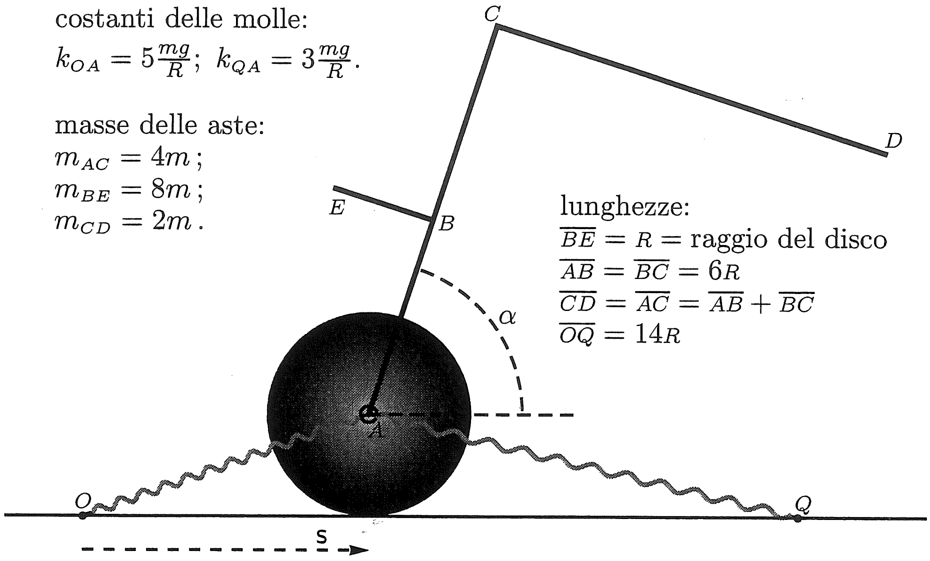
Meccanica Razionale M-Z - Ingegneria Meccanica - Università di Firenze
PROVA SCRITTA DEL 28 GENNAIO 2020

COGNOME: PIU	NOME: ELENA
MATRICOLA: 7003495	CdL:

Riservato alla correzione: [31]

	a △▽	b △▽ |	c △▽ |	d □	e □	
30	V	V	V	V	V	X



costanti delle molle:
$k_{OA} = 5\frac{mg}{R}$; $k_{QA} = 3\frac{mg}{R}$.

masse delle aste:
$m_{AC} = 4m$;
$m_{BE} = 8m$;
$m_{CD} = 2m$.

lunghezze:
$\overline{BE} = R =$ raggio del disco
$\overline{AB} = \overline{BC} = 6R$
$\overline{CD} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
$\overline{OQ} = 14R$

Sistema meccanico olonomo **piano verticale**, vincoli lisci. Le tre aste omogenee AC, CD e BE sono saldate, ad angoli retti, a formare un unico corpo rigido, che è poi incernierato in A al centro di un disco che rotola su una guida rettilinea orizzontale. Molle di lunghezza a riposo nulla collegano A con i punti O e Q della guida.

Il disco non è omogeneo: la sua densità ha l'espressione radiale $\rho(r) = 3mr/(\pi R^3)$.

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare le coordinate Lagrangiane (s, α), dove α è l'angolo, crescente in senso antiorario per chi guarda il disegno, tra il vettore $C - A$ e la semiretta orizzontale uscente da A verso destra; e s è l'ascissa di A con origine in O.

AVVERTENZA: *Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.*

Trovare $\boxed{\text{a}}$ il potenziale e $\boxed{\text{b}}$ l'energia cinetica del sistema; $\boxed{\text{c}}$ scrivere l'equazione di Lagrange; $\boxed{\text{d}}$ trovare le configurazioni di equilibrio e, $\boxed{\text{e}}$ scrivere la matrice Hessiana del potenziale, valutarla in ciascuna configurazione di equilibrio e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$\mathcal{U} = -96\, mgR \,\text{sen}\,\alpha + 8\, mgR\cos\alpha - 4\, mg\frac{s^2}{R} + 42\, mg\, s$$

$$\mathcal{T} = \frac{13}{5} m\dot{s}^2 + \frac{1300}{3} mR^2\dot{\alpha}^2 - 96\, mR\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{s}\dot{\alpha} + 8\, mR\cos\alpha\,\dot{s}\dot{\alpha}$$

VOLTARE PAGINA

Equazione di Lagrange (2 componenti):

$$\begin{cases} \dfrac{86}{5}\ddot{s} - (96R\cos\alpha + 8R\operatorname{sen}\alpha)\dot{\alpha}^2 + (8R\cos\alpha - 72R\operatorname{sen}\alpha)\ddot{\alpha} = \\ \qquad = g(42 - 8\, s/R) \\ \dfrac{2600}{3} R^2\ddot{\alpha} + (8R\cos\alpha - 96R\operatorname{sen}\alpha)\ddot{s} = -gR(96\cos\alpha + 8\operatorname{sen}\alpha) \end{cases}$$

Configurazioni di equilibrio:

① $s = \dfrac{21}{4}R$, $\alpha = -\operatorname{arctg}(12)$

② $s = \dfrac{21}{4}R$, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(12)$

Hessiano e stabilità dell'equilibrio:

$$(H) = \begin{pmatrix} -\dfrac{8mg}{R} & 0 \\ 0 & mgR(96\operatorname{sen}\alpha - 8\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

$$(H)_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{8mg}{R} & 0 \\ 0 & -8mgR\sqrt{145} \end{pmatrix}$$

autovalori negativi: massimo del potenziale

EQUILIBRIO STABILE

$$(H)_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{8mg}{R} & 0 \\ 0 & 8mgR\sqrt{145} \end{pmatrix}$$

autovalori di segno alterno: punto di sella del potenziale